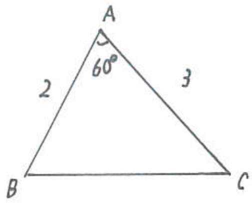
2016年 医学部 第3問

$\boxed{3}$ 平面上の三角形ABCは，AB = 2，AC = 3，∠BAC = 60° を満たしているとする．また，平面上の動点Pに対し実数 $f(\mathrm{P})$ を

$$f(\mathrm{P}) = \overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}} + \overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}} + \overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}$$



で定める．このとき，次の問に答えよ．

(1) 三角形ABCの重心をGとするとき，$f(\mathrm{G})$ の値を求めよ．
(2) $f(\mathrm{P}) = \dfrac{8}{3}$ となる点Pの全体は円になることを示せ．
(3) 点Pが平面全体を動くとき，$f(\mathrm{P})$ のとりうる値の範囲を求めよ．

(1) $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

$\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}(-2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

$\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC})$

また，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos 60^\circ = 3$ であるから

$f(G) = \overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{CG}\cdot\overrightarrow{AG}$

$= \frac{1}{9}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot(-2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}) + \frac{1}{9}(-2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}) + \frac{1}{9}(\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$

$= \frac{1}{9}(-3|\overrightarrow{AB}|^2 + 3\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} - 3|\overrightarrow{AC}|^2)$

$= \frac{1}{9}(-12 + 9 - 27)$

$= -\frac{10}{3}$

(2) $f(P) = (\overrightarrow{GP}-\overrightarrow{GA})\cdot(\overrightarrow{GP}-\overrightarrow{GB}) + (\overrightarrow{GP}-\overrightarrow{GB})\cdot(\overrightarrow{GP}-\overrightarrow{GC}) + (\overrightarrow{GP}-\overrightarrow{GC})\cdot(\overrightarrow{GP}-\overrightarrow{GA})$

$= 3|\overrightarrow{GP}|^2 - 2\overrightarrow{GP}\cdot(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}) + \overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC}\cdot\overrightarrow{GA}$

$= 3|\overrightarrow{GP}|^2 + 2\overrightarrow{GP}\cdot(\underbrace{\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}}_{\text{Gは重心より }0}) + \underbrace{\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{CG}\cdot\overrightarrow{AG}}_{\text{(1)より，}-\frac{10}{3}}$

$= 3|\overrightarrow{GP}|^2 - \frac{10}{3}$

$\therefore$ $f(P) = \frac{8}{3}$ より，$3|\overrightarrow{GP}|^2 - \frac{10}{3} = \frac{8}{3}$ $\therefore$ $|\overrightarrow{GP}| = \sqrt{2}$ $\therefore$ 点Pは重心Gを中心とする半径$\sqrt{2}$の円上の点 ▨

(3) $f(P) = 3|\overrightarrow{GP}|^2 - \frac{10}{3} \geqq -\frac{10}{3}$ $\therefore$ $f(P) \geqq -\frac{10}{3}$（等号はPが重心のとき成立）//