

2013年第4問

4 $f = (x \ y) \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とする。このとき、以下の問いに答えよ。ただし、 a, b, c, x, y は実数とする。

(1) 次の等式を満たす d, e を a, b, c を用いて表せ。

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & d \\ d & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & e \\ -e & 0 \end{pmatrix}$$

(2) $b = c = 0$ のとき、 $x = y = 0$ を除くすべての x, y に対して $f > 0$ となる a の条件を求めよ。

(3) $P = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ とし、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ とする。このとき、次の等式を満たす z, w, θ を求めよ。ただし、 $b \neq 0$ とする。

$$P^{-1} \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix}$$

(4) (1) と (3) の結果を利用して、 $x = y = 0$ を除くすべての x, y に対して $f > 0$ となる a の条件を b, c を用いて求めよ。