福岡教育大学

2015年 第4問

1枚目／2枚

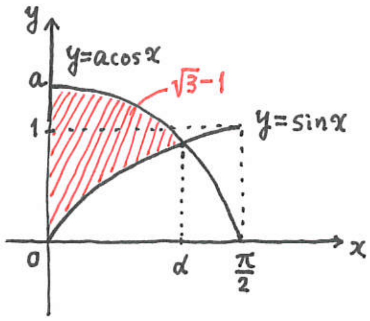
数理 石井K

$\boxed{4}$ aを正の定数とし，曲線 $y = a\cos x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と曲線 $y = \sin x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と y 軸によって囲まれる部分の面積が $\sqrt{3}-1$ であるとする．次の問いに答えよ．

(1) a の値を求めよ．

(2) 曲線 $y = a\cos x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と曲線 $y = \tan x$ $\left(0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ の交点を求めよ．

(3) 曲線 $y = a\cos x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と曲線 $y = \tan x$ $\left(0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ と y 軸によって囲まれる部分を x 軸の周りに1回転させてできる立体の体積を求めよ．



(1) $y=a\cos x$ と $y=\sin x$ の $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ での交点のx座標を α とおくと．$\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$

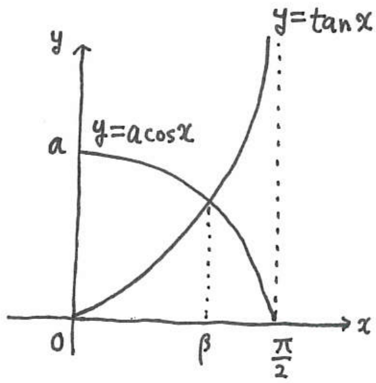
ここで，$\sin\alpha = a\cos\alpha$ より $\sin^2\alpha = a^2\cos^2\alpha$

$\therefore (a^2+1)\sin^2\alpha = a^2$ $\sin\alpha > 0$ より．$\sin\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}}$

このとき，$\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}$

$$\therefore \int_0^\alpha a\cos x - \sin x\, dx = \Big[a\sin x + \cos x\Big]_0^\alpha$$
$$= a\sin\alpha + \cos\alpha - 1$$
$$= \sqrt{a^2+1} - 1$$

$\therefore \sqrt{a^2+1} - 1 = \sqrt{3}-1$ と $a>0$ より．$\underline{a=\sqrt{2}}$ //



(2) 交点のx座標をβとおくと．$\left(0<\beta<\frac{\pi}{2}\right)$

$a\cos\beta = \tan\beta$ $\therefore$ $a\cos^2\beta = \sin\beta$

$\therefore a\sin^2\beta + \sin\beta - a = 0$

(1)より．$a=\sqrt{2}$ なので $\sqrt{2}\sin^2\beta + \sin\beta - \sqrt{2} = 0$

$$\begin{matrix} \sqrt{2} & \times & -1 \\ 1 & & \sqrt{2} \end{matrix}$$

$\therefore (\sin\beta + \sqrt{2})(\sqrt{2}\sin\beta - 1) = 0$ $\sin\beta > 0$ より

$\sin\beta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \beta = \dfrac{\pi}{4}$ $\therefore$ $\underline{交点は\left(\dfrac{\pi}{4}, 1\right)}$ //

2015年 第4問　　2枚目／2枚

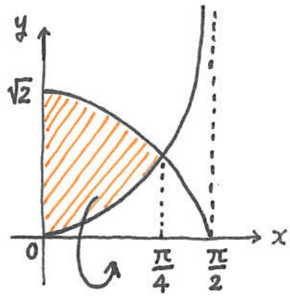
数理 石井K

$\boxed{4}$ aを正の定数とし，曲線 $y = a\cos x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と曲線 $y = \sin x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と y 軸によって囲まれる部分の面積が $\sqrt{3}-1$ であるとする．次の問いに答えよ．

(1) aの値を求めよ．

(2) 曲線 $y = a\cos x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と曲線 $y = \tan x$ $\left(0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ の交点を求めよ．

(3) 曲線 $y = a\cos x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と曲線 $y = \tan x$ $\left(0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ と y 軸によって囲まれる部分を x 軸の周りに1回転させてできる立体の体積を求めよ．



(3) $$V = \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sqrt{2}\cos x)^2\,dx - \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\,dx$$

$$= \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\cdot\frac{1+\cos 2x}{2} - \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx$$

$$= \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2 + \cos 2x - \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$$

$$= \pi\Big[\,2x + \frac{1}{2}\sin 2x - \tan x\,\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\pi^2}{2} + \frac{1}{2}\pi - \pi$$

$$= \underline{\frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi}{2}}\ /\!/$$