学習院大学

2013年 理学部 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 放物線 $C: y = x^2$ 上の点Pに対し，Pにおける C の法線を $L(\mathrm{P})$ とする（$L(\mathrm{P})$ は，Pを通り，Pでの C の接線に直交する直線である）．点 $\mathrm{Q}(a,\ 1)$ に対し，$L(\mathrm{P})$ がQを通るような C 上の点Pがちょうど3個あるための a の範囲を求めよ．

Pの座標を $\mathrm{P}(t, t^2)$ とおくと，

$y' = 2x$ より，Pでの C の接線の傾きは $2t$ であるから，

$t \neq 0$ のとき，$L(\mathrm{P}): y = -\frac{1}{2t}(x - t) + t^2$ すなわち，$L(\mathrm{P}): y = -\frac{1}{2t}x + t^2 + \frac{1}{2}$

$t = 0$ のとき，$L(\mathrm{P}): x = 0$

(i) $a = 0$ のとき，

$x = 0$ は $\mathrm{Q}(0, 1)$ を通るので

$1 = t^2 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ より，

点Pは $(0, 0)$，$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$ となり 3個ある

(ii) $a \neq 0$ のとき，

$1 = -\frac{1}{2t}\cdot a + t^2 + \frac{1}{2}$ が異なる3つの実数解をもつので

$t^3 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}a = 0$ となり，(左辺)を $f(t)$ とおくと，

$f'(t) = 3t^2 - \frac{1}{2}$

$\therefore f'(t) = 0$ となるのは，$t = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$ のとき

$t = 0$ は $f(t) = 0$ の解とはならないので

右の増減表より，

t	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\cdots$
$f'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$f\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\cdot f\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) < 0$ となればよい

$\therefore f\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \frac{1}{3\sqrt{6}} - \frac{1}{2}a$，$f\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = -\frac{1}{3\sqrt{6}} - \frac{1}{2}a$ より

$\left(\frac{1}{3\sqrt{6}} - \frac{1}{2}a\right)\left(-\frac{1}{3\sqrt{6}} - \frac{1}{2}a\right) < 0$　　$\therefore -\frac{\sqrt{6}}{9} < a < 0,\ 0 < a < \frac{\sqrt{6}}{9}$

(i)，(ii) より，

$$-\frac{\sqrt{6}}{9} < a < \frac{\sqrt{6}}{9}$$ //