2015年 文学部 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ 放物線 $C_1 : y = x^2$ 上の点Pにおける C_1 の接線を L_1 とし，放物線 $C_2 : y = 2x^2 + 1$ の接線で L_1 と平行なものを L_2 とする．さらに，Pから L_2 に下ろした垂線の長さを l とする．Pが C_1 上を動くとき，l の最小値を求めよ．

$P(t, t^2)$ とおくと，$y' = 2x$ より，$L_1 : y = 2t(x-t) + t^2$

$\therefore L_1 : y = 2tx - t^2$

C_2 において，$y' = 4x$ より $4x = \underbrace{2t}_{L_1\text{の傾き}}$ $\quad \therefore x = \frac{1}{2}t$

$\therefore C_2$ と L_2 の接点は $\left(\frac{1}{2}t, \frac{1}{2}t^2 + 1\right)$

$\therefore L_2 : y = 2t\left(x - \frac{1}{2}t\right) + \frac{1}{2}t^2 + 1$

$\therefore L_2 : y = 2tx - \frac{1}{2}t^2 + 1 \iff 2tx - y - \frac{1}{2}t^2 + 1 = 0$

点と直線のキョリ公式より

$$l = \frac{\left|2t^2 - t^2 - \frac{1}{2}t^2 + 1\right|}{\sqrt{(2t)^2 + 1}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}t^2 + 1}{\sqrt{4t^2 + 1}}$$

ここで，$s = \sqrt{4t^2 + 1}$ とおくと，$s \geqq 1$ で，$s^2 = 4t^2 + 1$ $\quad \therefore t^2 = \frac{1}{4}s^2 - \frac{1}{4}$

$$\therefore l = \frac{\frac{1}{8}s^2 - \frac{1}{8} + 1}{s}$$

$$= \frac{1}{8}\left(s + \frac{7}{s}\right)$$

$s \geqq 1$ より，相加・相乗平均の関係 $s + \frac{7}{s} \geqq 2\sqrt{s \cdot \frac{7}{s}}$
$= 2\sqrt{7}$

（等号成立は $s = \frac{7}{s}$ すなわち，$s = \sqrt{7} \iff t = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}$ のとき）

よって，$l \geqq \frac{1}{8} \cdot 2\sqrt{7}$
$= \frac{\sqrt{7}}{4}$

$\therefore$ 最小値 $\frac{\sqrt{7}}{4}$ （$t = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}$ のとき）//