0001642097538999

北海道大学

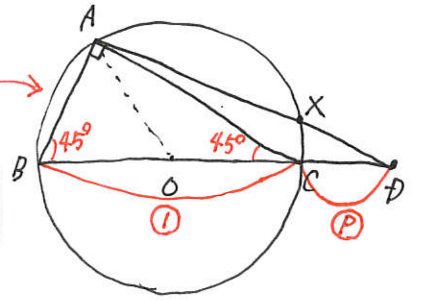
2014年 文系 第3問

$\boxed{3}$ △ABC を線分 BC を斜辺とする直角二等辺三角形とし，その外接円の中心を O とする．正の実数 p に対して，BC を $(p+1):p$ に外分する点を D とし，線分 AD と △ABC の外接円との交点で A と異なる点を X とする．

(1) ベクトル $\overrightarrow{OD}$ を $\overrightarrow{OC}$，p を用いて表せ．

(2) ベクトル $\overrightarrow{OX}$ を $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OC}$，p を用いて表せ．

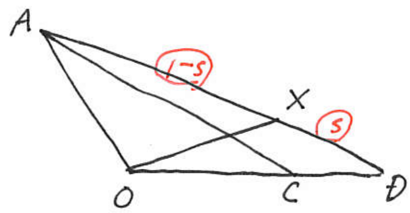
図が変だけど直角二等辺三角形です　訂正



(1) $OC : OD = \frac{1}{2} : \frac{1}{2} + P$

$= 1 : 1 + 2P$ より

$\overrightarrow{OD} = (2P+1)\overrightarrow{OC}$ //



(2) $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{AD}$ (k：実数) と表せるので

$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + k(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA})$

$= (1-k)\overrightarrow{OA} + k(2P+1)\overrightarrow{OC}$ ——(★)

$OA = OB = OC = r$ とおいた
$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} = 0$

$\therefore |\overrightarrow{OX}|^2 = (1-k)^2 r^2 + 2k(1-k)(2P+1)\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} + k^2(2P+1)^2 r^2$

$= \{(1-k)^2 + k^2(2P+1)^2\} r^2$

一方 OX は円の半径より $|\overrightarrow{OX}|^2 = r^2$

$\therefore (1-k)^2 + k^2(2P+1)^2 = 1$

$\therefore 2k\{k(1+2P+2P^2) - 1\} = 0$

$k > 0$ より． $k = \frac{1}{1+2P+2P^2}$

(★)に代入して， $\overrightarrow{OX} = \frac{2P(P+1)}{2P^2+2P+1}\overrightarrow{OA} + \frac{2P+1}{2P^2+2P+1}\overrightarrow{OC}$ //