

2016年理学部第3問

3 関数 $f(x) = \frac{\log x}{\sqrt{x}}$ ($1 \leq x \leq 8$) について、次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ の最大値、最小値を求めよ。

(2) 曲線 $y = f(x)$, x 軸, および直線 $x = e$ とで囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ。

$$(1) f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot \sqrt{x} - \log x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{\frac{1}{2}(2 - \log x)}{x\sqrt{x}}$$

$\therefore 1 \leq x \leq 8$ において、 $f'(x) = 0$ となるのは $x = e^2$ のとき。

x	1	...	e^2	...	8
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	↗	$\frac{2}{e}$	↘	

$\frac{3\sqrt{2}\log 2}{4}$

$\log 2 > 0$ であるから。

$\left\{ \begin{array}{l} \text{最大値 } \frac{2}{e} \text{ (} x = e^2 \text{ のとき)} \\ \text{最小値 } 0 \text{ (} x = 1 \text{ のとき)} \end{array} \right.$

(2) 本図より。

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_1^e \{f(x)\}^2 dx \\
 &= \pi \int_1^e \frac{(\log x)^2}{x} dx \\
 &= \pi \left[\frac{1}{3} (\log x)^3 \right]_1^e \\
 &= \pi \left(\frac{1}{3} - 0 \right) \\
 &= \frac{\pi}{3} \quad \text{〃}
 \end{aligned}$$

