

2015年工学部第4問

4 xy 平面において、関数 $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ が表す曲線を C とし、 C 上の点 $P\left(t, \frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ を考える。ただし、 $t > 0$ とする。点 P における曲線 C の接線が x 軸と交わる点を Q とする。このとき、以下の各問に答えよ。

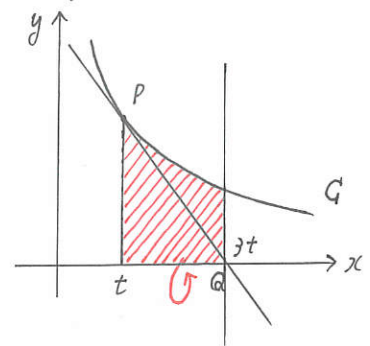
- (1) 点 Q の座標を求めよ。
- (2) 曲線 C 、 x 軸、直線 $x = t$ 、および点 Q を通り x 軸に垂直な直線で囲まれた部分を、 x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。
- (3) 線分 PQ の長さを $L(t)$ とする。点 P が C 上を動くとき、 $L(t)$ の最小値を求めよ。

$$(1) y = x^{-\frac{1}{2}} \text{ より } y' = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x\sqrt{x}}$$

$$\therefore \text{接線は } y = -\frac{1}{2t\sqrt{t}}(x-t) + \frac{1}{\sqrt{t}}$$

$$\therefore y = -\frac{1}{2t\sqrt{t}}x + \frac{3}{2\sqrt{t}}$$

$$\therefore 0 = -\frac{1}{2t\sqrt{t}}x + \frac{3}{2\sqrt{t}} \text{ より } x = 3t \quad \therefore Q(3t, 0)$$



$$(2) V = \pi \int_t^{3t} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$$

$$= \pi \int_t^{3t} \frac{1}{x} dx$$

$$= \pi [\log x]_t^{3t}$$

$$= \pi (\log 3t - \log t)$$

$$= \pi \log 3 //$$

$$(3) \{L(t)\}^2 = (3t-t)^2 + \left(0 - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)^2$$

$$= 4t^2 + \frac{1}{t}$$

$$= 4t^2 + \frac{1}{2t} + \frac{1}{2t}$$

$$\geq 3 \sqrt[3]{4t^2 \cdot \frac{1}{2t} \cdot \frac{1}{2t}} \quad (\text{相加・相乗平均の関係})$$

$$= 3$$

$$\text{等号成立は } 4t^2 = \frac{1}{2t} \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \text{ のとき}$$

$$\therefore \text{最小値 } \sqrt{3} \text{ (} t = \frac{1}{2} \text{ のとき) } //$$