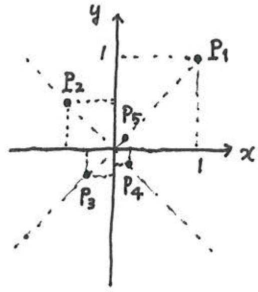
0001841908518999

香川大学

2014年 教育学部・農学部 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 自然数 n に対して，座標平面上の点 P_n を次のように帰納的に定める．点 P_1 の座標を $(1,\ 1)$ とし，原点O を中心として線分 OP_n を反時計回りに 90° 回転させてできる線分を OQ_n とし，線分 OQ_n の中点を P_{n+1} とする．このとき，次の問に答えよ．



(1) 点 P_2，P_3，P_4，P_5 の座標を求めよ．

(2) k を自然数とするとき，点 P_{4k+1} の座標を k を用いて表せ．

(3) 点 X_n を

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}_n} = \overrightarrow{\mathrm{OP}_1} + \overrightarrow{\mathrm{OP}_2} + \cdots + \overrightarrow{\mathrm{OP}_n}$$

となるように定める．このとき，点 X_2，X_3，X_4，X_5 の座標を求めよ．また，線分 OX_1，$\mathrm{X}_1\mathrm{X}_2$，$\mathrm{X}_2\mathrm{X}_3$，$\mathrm{X}_3\mathrm{X}_4$，$\mathrm{X}_4\mathrm{X}_5$ を座標平面上に図示せよ．

(4) k を自然数とするとき，点 X_{4k} の座標を k を用いて表せ．

(1). $P_2\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $P_3\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$, $P_4\left(\frac{1}{8}, -\frac{1}{8}\right)$, $P_5\left(\frac{1}{16}, \frac{1}{16}\right)$ //

(2) P_{n+4} は P_n を原点を中心として $90^\circ\times 4 = 360^\circ$ 回転させ，OP_{n+4} の長さは OP_n の長さの $\left(\frac{1}{2}\right)^4$ 倍であるから，

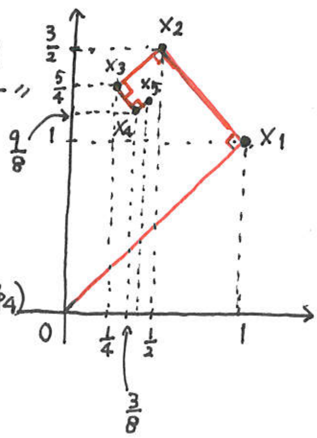
$$\overrightarrow{OP_{4k+1}} = \left(\frac{1}{16}\right)\cdot\overrightarrow{OP_{4k-3}} = \left(\frac{1}{16}\right)^2\cdot\overrightarrow{OP_{4k-7}} = \cdots = \left(\frac{1}{16}\right)^k \overrightarrow{OP_1}$$

$\therefore P_{4k+1}\left(\frac{1}{2^{4k}}, \frac{1}{2^{4k}}\right)$ //

(3) $\overrightarrow{OX_2} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ $\therefore X_2\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ // $\overrightarrow{OX_3} = \overrightarrow{OX_2} + \overrightarrow{OP_3} = \left(\frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right)$

$\therefore X_3\left(\frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right)$ // $\overrightarrow{OX_4} = \overrightarrow{OX_3} + \overrightarrow{OP_4} = \left(\frac{3}{8}, \frac{9}{8}\right)$ $\therefore X_4\left(\frac{3}{8}, \frac{9}{8}\right)$ //

$\overrightarrow{OX_5} = \overrightarrow{OX_4} + \overrightarrow{OP_5} = \left(\frac{7}{16}, \frac{19}{16}\right)$ $\therefore X_5\left(\frac{7}{16}, \frac{19}{16}\right)$ //



(4) (2)と同様にして．$\overrightarrow{OP_{4k+2}} = \left(\frac{1}{16}\right)^k\cdot\overrightarrow{OP_2}$, $\overrightarrow{OP_{4k+3}} = \left(\frac{1}{16}\right)^k\overrightarrow{OP_3}$,

$\overrightarrow{OP_{4k+4}} = \left(\frac{1}{16}\right)^k\overrightarrow{OP_4}$ となり，$\overrightarrow{OX_{4k+4}} = \overrightarrow{OX_{4k}} + \left(\frac{1}{16}\right)^k\left(\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}+\overrightarrow{OP_3}+\overrightarrow{OP_4}\right)$

$\therefore \underbrace{\overrightarrow{OX_{4k+4}} - \overrightarrow{OX_{4k}}}_{\text{階差数列とみる}} = \left(\frac{1}{16}\right)^k\cdot\overrightarrow{OX_4} = \left(\frac{1}{16}\right)^k\cdot\left(\frac{3}{8}, \frac{9}{8}\right)$

$\therefore \overrightarrow{OX_{4k}} = \overrightarrow{OX_4} + \sum_{i=1}^{k-1}\left(\frac{1}{16}\right)^i\cdot\left(\frac{3}{8}, \frac{9}{8}\right)$ $(k \geqq 2)$

$\therefore \overrightarrow{OX_{4k}} = \left(\frac{3}{8}, \frac{9}{8}\right) + \frac{1-\left(\frac{1}{16}\right)^{k-1}}{15}\cdot\left(\frac{3}{8}, \frac{9}{8}\right)$ $\therefore \overrightarrow{OX_{4k}} = \left(\frac{2}{5}\left(1-\frac{1}{16^k}\right), \frac{6}{5}\left(1-\frac{1}{16^k}\right)\right)$ //

これは $k=1$ のときも成立つ