



2015年工学部第5問

 数理  
石井K

5 (旧課程履修者) 行列  $A, E$  を  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  とし,  $a, b$  を  $a^2 + b^2 \neq 0$  を満たす実数とする. このとき, 次の問に答えよ.

- (1)  $A^2$  を求めよ.  
 (2)  $X = aA + bE$  の逆行列  $X^{-1}$  を求めよ.  
 (3)  $B^2 = -E$  を満たす任意の2次の正方行列  $B$  について,  $(aB + bE)(-aB + bE) = sB + tE$  となる実数  $s, t$  を  $a, b$  を用いて表せ.  
 (4) (3) の  $B$  に対して  $Y = aB + bE$  とおくと,  $pB + qE$  が  $Y$  の逆行列  $Y^{-1}$  と等しくなるような実数  $p, q$  を  $a, b$  を用いて表せ.

$$(1) A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} //$$

$$(2) X = \begin{pmatrix} b & -a \\ a & b \end{pmatrix} \text{ より, } \det X = b^2 + a^2 (\neq 0) \therefore X^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} b & a \\ -a & b \end{pmatrix} //$$

$$(3) \text{ 与式を展開して, } -a^2 B^2 + abB - abB + b^2 E = sB + tE$$

$$B^2 = -E \text{ より, } (a^2 + b^2)E = sB + tE$$

$$\therefore sB = (a^2 + b^2 - t)E$$

(i)  $B$  が  $E$  の実数倍のとき,  $B = kE$  とおくと,  $B^2 = k^2 E \therefore k^2 = -1$  となり不適

(ii)  $B$  が  $E$  の実数倍ではないとき.  $s = 0, t = a^2 + b^2 //$

$$(4) (3) \text{ より, } Y \cdot (-aB + bE) = (a^2 + b^2)E$$

$$a^2 + b^2 \neq 0 \text{ より, } Y \cdot \left( -\frac{a}{a^2 + b^2} B + \frac{b}{a^2 + b^2} E \right) = E$$

$$\therefore Y^{-1} = -\frac{a}{a^2 + b^2} B + \frac{b}{a^2 + b^2} E$$

$$\therefore p = -\frac{a}{a^2 + b^2}, q = \frac{b}{a^2 + b^2} //$$