0002068091397999

弘前大学

2015 年 理系 第 4 問

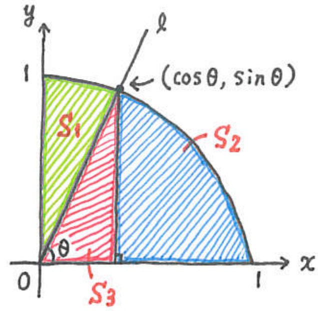
数理 石井K

$\boxed{4}$ xy 平面において，曲線 $C : x^2 + y^2 = 1$ $(x \geqq 0,\ y \geqq 0)$，および直線 $\ell : y = (\tan\theta)x$ を考える．ただし，θ は $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ をみたす定数とする．S_1，S_2，S_3 を次によって定める．

S_1： y 軸，曲線 C，直線 ℓ で囲まれた部分の面積

S_2： x 軸，曲線 C，直線 $x = \cos\theta$ で囲まれた部分の面積

S_3： x 軸，直線 ℓ，直線 $x = \cos\theta$ で囲まれた部分の面積



次の問いに答えよ．

(1) S_1 および S_2 を θ を用いて表せ．

(2) $S_1 = S_2$ となる θ が存在することを示せ．

(3) $S_1 = S_2 = S_3$ となる θ は存在しないことを示せ．

(1) S_1 が表す領域は，半径 1，中心角 $\frac{\pi}{2} - \theta$ の扇形より，

$$S_1 = \frac{1}{2}\cdot 1 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \underline{\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}}$$

$$S_2 = \frac{\pi}{4} - S_1 - S_3 = \frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) - \frac{1}{2}\cdot\sin\theta\cos\theta = \underline{\frac{1}{2}(\theta - \sin\theta\cos\theta)}$$

(2) $f(\theta) = S_1 - S_2$ $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ とおくと，

$$f(\theta) = \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2}(\theta - \sin\theta\cos\theta)$$

$$= \frac{\pi}{4} - \theta + \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta$$

$$= \frac{\pi}{4} - \theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta$$

$f'(\theta) = -1 + \frac{1}{2}\cos 2\theta < 0$ $\quad\therefore$ $f(\theta)$ は単調減少

また，$f(0) = \frac{\pi}{4} > 0$，$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{4} < 0$，$f(\theta)$ が連続であることから，

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ において，$S_1 = S_2$ となる θ がただ 1 つ存在する ▨

(3) $S_1 + S_2 + S_3 = \frac{\pi}{4}$ であるから，

$$S_1 = S_2 = S_3 \iff S_1 = S_2 = S_3 = \frac{\pi}{12}$$

ここで，$S_3 = \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta$

$$= \frac{1}{4}\sin 2\theta$$

$$\leqq \frac{1}{4}$$

$$< \frac{\pi}{12}$$

であるから，$S_1 = S_2 = S_3$ となる θ は存在しない ▨