香川大学

2015年 工学部 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ 図1のように，AB = AC = 5，BC = 6の二等辺三角形ABC内に，半径が等しい2つの円 O_1，O_2 が次の2つの条件を満たすように置かれているとする．

- 円 O_1 と円 O_2 は外接する．
- 円 O_1 は辺ABと辺BCに接し，円 O_2 は辺ACと辺BCに接する．

このとき，次の問に答えよ．

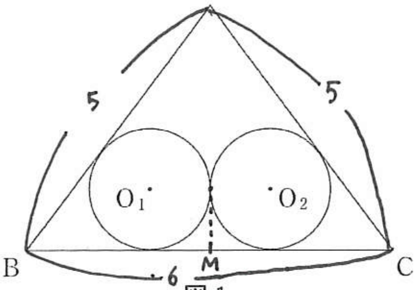

図1

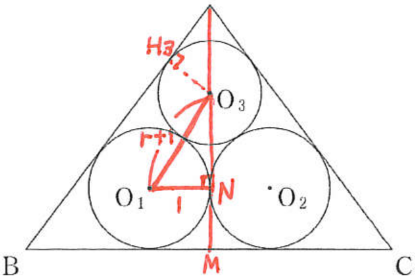

図2

(1) 辺BCの中点をMとしたとき，線分AMの長さを求めよ．
(2) 円 O_1 の半径 R を求めよ．
(3) さらに円 O_3 が図2のように円 O_1 と円 O_2 に外接し，辺ABと辺ACに接しているとき，円 O_3 の半径 r を求めよ．

(1) △ABMにおいて三平方の定理より，$AM^2 = 25 - 9 = 16$ ∴ $\underline{AM = 4}$ //

(2) △ABMの面積を2通りの方法で求める $\triangle ABM = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = \frac{1}{2} \times R \times (3+4+5)$

∴ $\underline{R = 1}$ //

(3) 円 O_3 と辺ABの接点を H_3，円 O_1 と O_2 の接点をNとおく

$O_1O_3 = r+1$，$O_1N = 1$ より $O_3N = \sqrt{r^2+2r}$ (∵三平方の定理)

また，NM = 1 より，$AO_3 = AM - 1 - \sqrt{r^2+2r}$ ∴ $AO_3 = 3 - \sqrt{r^2+2r}$

$\triangle ABM \sim \triangle AO_3H_3$ より，$AO_3 : H_3O_3 = AB : BM = 5 : 3$

∴ $5r = 3(3 - \sqrt{r^2+2r})$ ∴ $3\sqrt{r^2+2r} = 9 - 5r$ ∴ (左辺)は正より $0 < r < \frac{9}{5}$ …①

両辺2乗して，$9r^2 + 18r = 25r^2 - 90r + 81$ ∴ $16r^2 - 108r + 81 = 0$

∴ $r = \frac{108 \pm \sqrt{108^2 - 4 \cdot 16 \cdot 81}}{32} = \frac{54 \pm \sqrt{54^2 - 36^2}}{16} = \frac{54 \pm 18\sqrt{5}}{16} = \frac{27 \pm 9\sqrt{5}}{8}$

$\left(= \frac{9}{8}(3-\sqrt{5})\right.$ も可$\left.\right)$

① より，$\underline{r = \frac{27 - 9\sqrt{5}}{8}}$ //