香川大学

2016年 教育学部・農学部 第2問

$\boxed{2}$ 座標平面上の放物線 $y=-x^2+2$ を C_1 とし，$0<t<\sqrt{2}$ に対して，C_1 上の点 $\mathrm{P}(t,\ -t^2+2)$ をとる．点 P を通り x 軸に平行な直線を ℓ とする．また，点 P を通り，y 軸を軸とし原点を頂点とする放物線を C_2 とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) 放物線 C_2 の方程式を求めよ．

(2) 放物線 C_2 と直線 ℓ で囲まれた部分の面積 $S_2(t)$ を t を用いて表せ．

(3) 関数 $S_2(t)$ の $0<t<\sqrt{2}$ における最大値とそのときの t を求めよ．

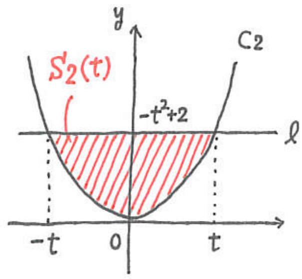
(4) 放物線 C_1 と直線 ℓ で囲まれた部分の面積を $S_1(t)$ とするとき，$S_1(t)=S_2(t)$ となる t を求めよ．

(1) C_2 は y 軸を軸とし，原点を頂点とする放物線なので

$y=ax^2$ と表せる．これが $P(t,-t^2+2)$ を通るので

$-t^2+2=at^2 \qquad \therefore\ a=-1+\dfrac{2}{t^2}\quad (\because 0<t<\sqrt{2})$

$\therefore\ \underline{C_2 : y=\left(\dfrac{2}{t^2}-1\right)x^2}$ //



(2) $\ell : y=-t^2+2$，

$0<t<\sqrt{2}$ より，$\dfrac{2}{t^2}-1>0$ となるので右図のようになる．

$\therefore\ S_2(t)=2\displaystyle\int_0^t -t^2+2-\left(\frac{2}{t^2}-1\right)x^2\,dx$

$=2\left[(-t^2+2)x-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{t^2}-1\right)x^3\right]_0^t$

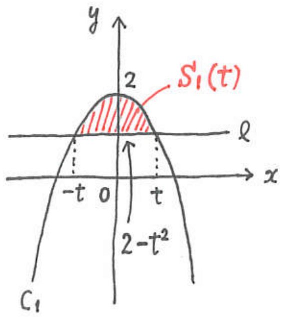
$=2\left(-t^3+2t-\dfrac{2}{3}t+\dfrac{1}{3}t^3\right)$

$=\underline{-\dfrac{4}{3}t^3+\dfrac{8}{3}t}$ //

t	(0)	$\cdots$	$\frac{\sqrt{6}}{3}$	$\cdots$	$(\sqrt{2})$
$S_2'(t)$		$+$	0	$-$	
$S_2(t)$	(0)	$\nearrow$	$\frac{16\sqrt{6}}{27}$	$\searrow$	(0)

(3) $S_2'(t)=-4t^2+\dfrac{8}{3}=-4\left(t+\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)\left(t-\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$

$\therefore$ 右の増減表より．$\underline{最大値\ \dfrac{16\sqrt{6}}{27}\ \left(t=\dfrac{\sqrt{6}}{3}\ のとき\right)}$ //



(4) 右図より $S_1(t)=2\displaystyle\int_0^t -x^2+2-(-t^2+2)\,dx$

$=2\left[-\dfrac{x^3}{3}+2x-(-t^2+2)x\right]_0^t$

$=\dfrac{4}{3}t^3$

$\therefore\ S_1(t)=S_2(t)$ より．$\dfrac{8}{3}t(t-1)(t+1)=0 \quad 0<t<\sqrt{2}$ より．$\underline{t=1}$ //