香川大学

2013年 教育学部・農学部 第3問

3 xが$3<x<6$の範囲にあるとき，次の問に答えよ．

(1) この範囲ではつねに $\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{4}{6-x}\geqq 3$が成立することを示せ．

(2) この範囲でつねに $\dfrac{5}{x-3}+\dfrac{4}{6-x}\geqq a$が成立するような$a$の最大値を求めよ．

(1) $$\frac{1}{x-3}+\frac{4}{6-x}-3=\frac{6-x+4(x-3)-3(x-3)(6-x)}{(x-3)(6-x)}$$

$$=\frac{3(x-4)^2}{(x-3)(6-x)}$$

$$\geqq 0 \quad (\because 3<x<6 \text{ より})$$

よって，$\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{4}{6-x}\geqq 3$ ▨

(2) $3<x<6$ より，$x-3>0$，$6-x>0$

∴ 与式の両辺に $(x-3)(6-x)>0$ をかけて

$$5(6-x)+4(x-3)\geqq a(x-3)(6-x)$$

$$\therefore\ ax^2-(9a+1)x+18(a+1)\geqq 0$$

ここで，$f(x)=ax^2-(9a+1)x+18(a+1)$ とおくと，

$$\frac{5}{4-3}+\frac{4}{6-4}=7 \text{ より，}\ a\geqq 7$$

$3<x<6$ において $f(x)\geqq 0$ となるので，

$y=f(x)$ の軸は $x=\dfrac{9a+1}{2a}=\dfrac{9}{2}+\dfrac{1}{2a}$ $\quad\therefore\ \dfrac{9}{2}<(\text{軸})<\dfrac{9}{2}+\dfrac{1}{14}\quad(\because a\geqq 7)$

∴ $f(x)=0$ の判別式をDとすると，$D\leqq 0$ となればよい

$$\therefore\ D=(9a+1)^2-4a\cdot 18(a+1)$$

$$=81a^2+18a+1-72a^2-72a$$

$$=9a^2-54a+1$$

$$\therefore\ 9a^2-54a+1\leqq 0$$

$$\therefore\ \frac{9-4\sqrt{5}}{3}\leqq a\leqq\frac{9+4\sqrt{5}}{3}$$

∴ aの最大値は，$\underline{a=\dfrac{9+4\sqrt{5}}{3}}$ //