香川大学

2013年 医学部 第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ 関数 $f(x)=x^4+x^3$ について，次の問に答えよ．

(1) この関数のグラフの概形をかけ．

(2) この関数のグラフ上の3点 $P(t-1,\ f(t-1))$，$Q(t,\ f(t))$，$R(t+1,\ f(t+1))$ を頂点とする三角形の面積 $S(t)$ を t の式で表せ．

(3) $S(t)$ の最小値を求めよ．

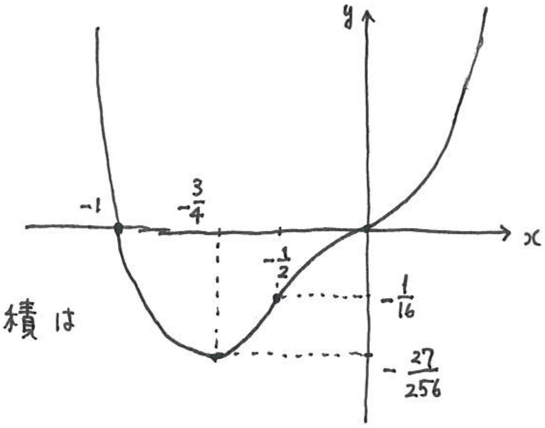
(1) $f'(x)=4x^3+3x^2=x^2(4x+3)$

$f''(x)=12x^2+6x=6x(2x+1)$

∴ 右の増減表より，

グラフは右下のようになる．

x	$\cdots$	$-\frac{3}{4}$	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-\frac{27}{256}$	↗	$-\frac{1}{16}$	↗	0	↗



(2) P, Q, R の点を

x方向に $-t$，y方向に $-f(t)$

平行移動した点をそれぞれ P', Q', R'

とすると，平行移動によって，三角形の面積は

変化しない．

$P'(-1,\ f(t-1)-f(t))$，$Q'(0,\ 0)$，$R'(1,\ f(t+1)-f(t))$

$=(t-1)^4+(t-1)^3-t^4-t^3$ 　　 $=(t+1)^4+(t+1)^3-t^4-t^3$

$=-4t^3+6t^2-4t+1-3t^2+3t-1$ 　　 $=4t^3+6t^2+4t+1+3t^2+3t+1$

$$\therefore S(t)=\frac{1}{2}\left|-4t^3+3t^2-t+4t^3+9t^2+7t+2\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|12t^2+6t+2\right| \quad =12\left(t+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{5}{4}>0$$

$$=\underline{6t^2+3t+1}$$

(3) (2)より，$S(t)=\frac{1}{2}\cdot\left\{12\left(t+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{5}{4}\right\}=6\left(t+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{5}{8}$

∴ $\underline{S(t)\text{ の最小値は }\frac{5}{8}\ \left(t=-\frac{1}{4}\text{ のとき}\right)}$