



2015年 教育学部・農学部 第3問

1枚目/2枚

3 数列  $\{a_n\}$  は,

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{2a_n + 2}{a_n + 2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定められているとする。このとき、次の間に答えよ。

- (1)  $n$  が自然数のとき、数学的帰納法を用いて  $\sqrt{2} < a_n$  を示せ。  
 (2)  $n$  が自然数のとき、 $a_{n+1} < a_n$  を示せ。  
 (3)  $n$  が自然数のとき、数学的帰納法を用いて

$$a_n - \sqrt{2} \leq \frac{(2 - \sqrt{2})^n}{3^{n-1}}$$

を示せ。

(1) (i)  $n=1$  のとき

$$a_1 = 2 > \sqrt{2} \quad \therefore \text{成り立つ}$$

(ii)  $n=k$  のとき成り立つとすると、

$$a_k > \sqrt{2} \quad \dots \textcircled{1}$$

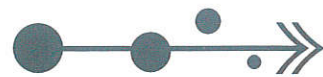
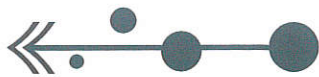
$$\begin{aligned} \text{このとき, } a_{k+1} &= \frac{2a_k + 2}{a_k + 2} \\ &= \frac{2(a_k + 2) - 2}{a_k + 2} \\ &= 2 - \frac{2}{a_k + 2} \\ &> 2 - \frac{2}{\sqrt{2} + 2} \quad (\because \textcircled{1} \text{より}) \\ &= 2 - \frac{2(2 - \sqrt{2})}{(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

$\therefore n = k+1$  のとき成り立つ

(i), (ii) より、 $n$  が自然数のとき、 $a_n > \sqrt{2}$  が成り立つ  $\square$

$$\begin{aligned} (2) \quad a_n - a_{n+1} &= a_n - \frac{2a_n + 2}{a_n + 2} > 0 \quad (\because a_n > \sqrt{2} \text{より}) \\ &= \frac{a_n^2 + 2a_n - 2a_n - 2}{a_n + 2} \\ &= \frac{(a_n + \sqrt{2})(a_n - \sqrt{2})}{a_n + 2} \end{aligned}$$

$\therefore a_n > a_{n+1}$  が成り立つ  $\square$



2015年 教育学部・農学部 第3問

2枚目/2枚

3 数列  $\{a_n\}$  は,

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{2a_n + 2}{a_n + 2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定められているとする。このとき、次の間に答えよ。

- (1)  $n$  が自然数のとき、数学的帰納法を用いて  $\sqrt{2} < a_n$  を示せ。
- (2)  $n$  が自然数のとき、 $a_{n+1} < a_n$  を示せ。
- (3)  $n$  が自然数のとき、数学的帰納法を用いて

$$a_n - \sqrt{2} \leq \frac{(2 - \sqrt{2})^n}{3^{n-1}}$$

を示せ。

(3) (i)  $n = 1$  のとき。

$$(\text{左辺}) = a_1 - \sqrt{2} = 2 - \sqrt{2}, \quad (\text{右辺}) = 2 - \sqrt{2} \text{ となり 成り立つ}$$

(ii)  $n = k$  のとき 成り立つと仮定すると、

$$a_k - \sqrt{2} \leq \frac{(2 - \sqrt{2})^k}{3^{k-1}} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\begin{aligned} a_{k+1} - \sqrt{2} &= \frac{2a_k + 2 - \sqrt{2}(a_k + 2)}{a_k + 2} \\ &= \frac{(2 - \sqrt{2})(a_k - \sqrt{2})}{a_k + 2} \\ &\leq \frac{2 - \sqrt{2}}{1 + 2} \cdot \frac{(2 - \sqrt{2})^k}{3^{k-1}} \quad (\because a_n > 1 \text{ と } \textcircled{2} \text{ より}) \\ &= \frac{(2 - \sqrt{2})^{k+1}}{3^k} \end{aligned}$$

$\therefore n = k+1$  のとき 成り立つ

(i), (ii) より、与えられた不等式は成り立つ  $\square$