0002305724967999

県立広島大学

2016年 第4問　　1枚目／2枚

数理 石井K

4 t を正の実数とする．関数 $f(t)$ を

$$f(t)=\int_0^2 |x^3-tx^2+2tx-2t^2|\,dx$$

で定義する．次の問いに答えよ．

(1) $x^3-tx^2+2tx-2t^2$ を因数分解せよ．

(2) $f(t)$ を t を用いて表せ．

(3) $f(t)$ の最小値を求めよ．

(1) $(与式) = x^2(x-t)+2t(x-t)$

$= \underline{(x-t)(x^2+2t)}$ //

(2) $f(t)=\int_0^2 |(x-t)(x^2+2t)|\,dx$

$t>0$ より，$x^2+2t>0$ であるから

$f(t)=\int_0^2 (x^2+2t)|x-t|\,dx$

(i) $0<t<2$ のとき

$$f(t)=\int_0^t (x^2+2t)(t-x)\,dx+\int_t^2 (x^2+2t)(x-t)\,dx$$

$$=\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{t}{3}x^3-tx^2+2t^2x\right]_0^t+\left[\frac{x^4}{4}-\frac{t}{3}x^3+tx^2-2t^2x\right]_t^2$$

$$=-\frac{t^4}{4}+\frac{t^4}{3}-t^3+2t^3+4-\frac{8}{3}t+4t-4t^2-\left(\frac{t^4}{4}-\frac{t^4}{3}+t^3-2t^3\right)$$

$$=\frac{1}{6}t^4+2t^3-4t^2+\frac{4}{3}t+4$$

(ii) $t\geqq 2$ のとき

$$f(t)=\int_0^2 (x^2+2t)(t-x)\,dx$$

$$=\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{t}{3}x^3-tx^2+2t^2x\right]_0^2$$

$$=4t^2-\frac{4}{3}t-4$$

(i)，(ii) より，

$$f(t)=\begin{cases}\frac{1}{6}t^4+2t^3-4t^2+\frac{4}{3}t+4 & (0<t<2 \text{ のとき})\\ 4t^2-\frac{4}{3}t-4 & (t\geqq 2 \text{ のとき})\end{cases}$$ //

2016年 第4問　　2枚目/2枚

数理 石井K

$\boxed{4}$ t を正の実数とする．関数 $f(t)$ を

$$f(t)=\int_0^2 |x^3-tx^2+2tx-2t^2|\,dx$$

で定義する．次の問いに答えよ．

(1) $x^3-tx^2+2tx-2t^2$ を因数分解せよ．

(2) $f(t)$ を t を用いて表せ．

(3) $f(t)$ の最小値を求めよ．

(3) (i) $0<t<2$ における最小値を求める

$$f'(t)=\frac{2}{3}t^3+6t^2-8t+\frac{4}{3}$$
$$=\frac{2}{3}(t^3+9t^2-12t+2)$$
$$=\frac{2}{3}(t-1)(t^2+10t-2)$$

$\therefore$ $f'(t)=0$ となるのは，$t=1,\ -5\pm3\sqrt{3}$

$-5-3\sqrt{3}<0$，$0<-5+3\sqrt{3}<1$ より増減表は次のようになる．

ただし，$\alpha=-5+3\sqrt{3}$ とおいた

t	(0)	$\cdots$	α	$\cdots$	1	$\cdots$	(2)
$f'(t)$		$+$	0	$-$		$+$	
$f(t)$	(4)	$\nearrow$		$\searrow$	$\frac{7}{2}$	$\nearrow$	$\left(\frac{28}{3}\right)$

$\therefore$ $0<t<2$ における最小値は，$\frac{7}{2}$ ($t=1$ のとき)

(ii) $t\geqq2$ のとき

$$f(t)=4\left(t^2-\frac{1}{3}t\right)-4$$
$$=4\left(t-\frac{1}{6}\right)^2-\frac{37}{9}$$

$t\geqq2$ より，最小値は $\frac{28}{3}$ ($t=2$ のとき)

(i)，(ii) より

最小値 $\frac{7}{2}$ ($t=1$ のとき)