2013年 工学部 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ aを実数の定数とする．2曲線 $y=x^2$ と $y=\dfrac{4}{x+a}$ がちょうど2つの共有点を持っているとき，下の問いに答えなさい．

(1) aの値を求めなさい．

(2) 2曲線で囲まれた図形の面積を求めなさい．

(1) $x^2-\dfrac{4}{x+a}=0$ が異なる2つの実数解をもつので

$x^2(x+a)-4=0 \iff x^3+ax^2-4=0$

$f(x)=x^3+ax^2-4$ とおくと，

$f'(x)=3x^2+2ax$

$=x(3x+2a)$

(i) $a>0$ のとき．

右の増減表より．

x	$\cdots$	$-\frac{2a}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$	-4	$\nearrow$

$f\left(-\frac{2a}{3}\right)=0 \quad \therefore f\left(-\frac{2a}{3}\right)=-\frac{8a^3}{27}+\frac{4a^3}{9}-4=0$

$\therefore -8a^3+12a^3-108=0 \quad \therefore a^3=27$ 　a：実数より $a=3$

(ii) $a=0$ のとき

$f(x)=x^3-4$ となり．異なる2つの実数解をもたず不適．

(iii) $a<0$ のとき

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$-\frac{2a}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	-4	$\searrow$		$\nearrow$

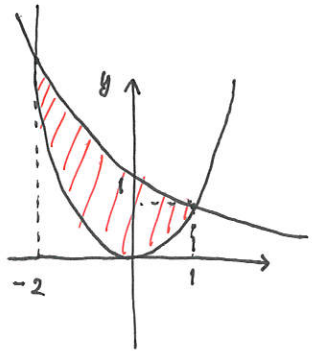
(i)と同じく $f\left(-\frac{2a}{3}\right)=0$

$a<0$ となるものは存在しない

(i)〜(iii)より．$\underline{a=3}$ //

(2) $a=3$ のとき．$f(x)=x^3+3x^2-4$

$=(x-1)(x+2)^2$



$\therefore S=\displaystyle\int_{-2}^{1}\frac{4}{x+3}-x^2\,dx$

$=\left[4\log|x+3|-\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{1}$

$=\underline{8\log 2-3}$ //