

2015年工学部第4問

 4 放物線  $y = x^2 - 2x + 1$  と直線  $y = 4$  とで囲まれた図形を  $D$  とするとき、下の問いに答えなさい。

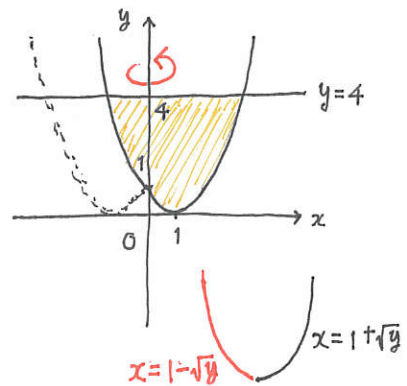
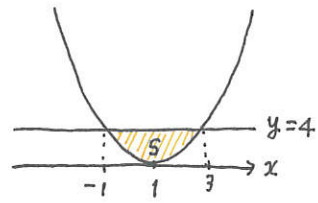
- (1)  $D$  の面積  $S$  を求めなさい。  
 (2)  $D$  を  $y$  軸のまわりに1回転してできる立体の体積  $V$  を求めなさい。

$$(1) (x-1)^2 = 4 \text{ を解くと, } x-1 = \pm 2$$

$$\therefore x = 3, -1$$

 $\therefore$  右の図より

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^3 4 - (x-1)^2 dx \\ &= - \int_{-1}^3 (x-3)(x+1) dx \\ &= \frac{1}{6} \cdot \{3 - (-1)\}^3 \\ &= \frac{32}{3} \text{ 〃} \end{aligned}$$



$$(2) y = (x-1)^2 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{y}$$

$$\begin{aligned} \therefore V &= \int_0^1 \pi(x_+)^2 - \pi(x_-)^2 dy + \int_1^4 \pi(x_+)^2 dy \\ &= \pi \int_0^1 (1+\sqrt{y})^2 - (1-\sqrt{y})^2 dy + \pi \int_1^4 (1+\sqrt{y})^2 dy \\ &= \pi \int_0^1 4\sqrt{y} dy + \pi \int_1^4 1 + 2\sqrt{y} + y dy \\ &= \pi \left[ \frac{8}{3} y^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 + \pi \left[ y + \frac{4}{3} y^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} y^2 \right]_1^4 \\ &= \frac{8}{3} \pi + \pi \left( 4 + \frac{32}{3} + 8 - 1 - \frac{4}{3} - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{45}{2} \pi \text{ 〃} \end{aligned}$$

