名古屋市立大学

2013 年 薬学部 第 2 問

$\boxed{2}$ 逆行列をもつ行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ によって表される 1 次変換を考える．以下の問いに答えよ．

(1) この変換によって xy 平面上の任意の 2 点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ および $\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ がそれぞれ $\mathrm{P}'(x_1{}',\ y_1{}')$ および $\mathrm{Q}'(x_2{}',\ y_2{}')$ に移されるとき，2 点間の距離が変換によって変化しない，つまり，$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{P'Q'}}|^2$ であるための必要十分条件は，

$$A^{\mathrm{T}}A=E \qquad \cdots\cdots(*)$$

であることを示せ．ただし，A^{T} は A の行と列を入れ替えた行列要素をもつ行列，すなわち，

$$A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

である．また，E は単位行列である．

(2) 原点のまわりの回転移動および x 軸に関する対称移動の 1 次変換を，それぞれ，f および g とする．これらの 1 次変換を表す行列は，それぞれ，上の条件 $(*)$ を満たすことを確かめよ．

(3) (2) で考えた 1 次変換 f および g を表す行列をそれぞれ F および G とし，$A=FGF^{-1}$ で定義される行列 A によって表される 1 次変換を考える．この変換によって直線 $y=mx$ 上の任意の点がそれ自身に移されるとき，A を実数 m を用いて表せ．ただし，F^{-1} は F の逆行列を表す．

(4) (1) で考えた点 P，Q，P′，Q′ の座標を用いて，$S=x_1y_2-y_1x_2$ および $S'=x_1{}'y_2{}'-y_1{}'x_2{}'$ を定義する．P，Q から P′，Q′ への変換を表す行列が (3) で求めた A で与えられるとき，S と S' の関係式を求めよ．