0001642547538999

大阪大学

2014年 第1問

$\boxed{1}$ i は虚数単位とし，実数 a，b は $a^2+b^2>0$ を満たす定数とする．複素数 $(a+bi)(x+yi)$ の実部が2に等しいような座標平面上の点 (x, y) 全体の集合を L_1 とし，また $(a+bi)(x+yi)$ の虚部が -3 に等しいような座標平面上の点 (x, y) 全体の集合を L_2 とする．

(1) L_1 と L_2 はともに直線であることを示せ．

(2) L_1 と L_2 は互いに垂直であることを示せ．

(3) L_1 と L_2 の交点を求めよ．

$ay = -3 - b\cdot\frac{2a-3b}{a^2+b^2}$

$ay = \frac{-3a^2-\cancel{3b^2}-2ab+\cancel{3b^2}}{a^2+b^2}$

(1) $(a+bi)(x+yi) = (ax-by)+i(ay+bx)$

$\therefore$ $L_1 : ax-by = 2$ ，$L_2 : ay+bx = -3$ となりともに直線．

で a, b がともに 0 になることはない

(注) a, b がともに 0 だと，$L_1 : 0 = 2$ となり図形として表れないことに注意

(2) ~~L_1 の~~ (i) $a=0$ のとき $(b\neq 0)$

L_1 は $y = -\frac{2}{b}$，L_2 は $x = -\frac{3}{b}$ $\therefore$ 垂直

(ii) $b=0$ のとき $(a\neq 0)$

L_1 は $x = \frac{2}{a}$，L_2 は $y = -\frac{3}{a}$ $\therefore$ 垂直

(iii) $a\neq 0$，$b\neq 0$ のとき

L_1 の傾きは $\frac{a}{b}$，L_2 の傾きは $-\frac{b}{a}$ $\therefore$ 垂直

(3) (2)より．(i) $a=0$，$b\neq 0$ のとき 交点は $\left(-\frac{3}{b}, -\frac{2}{b}\right)$

(ii) $a\neq 0$，$b=0$ のとき 交点は $\left(\frac{2}{a}, -\frac{3}{a}\right)$

(iii) $a\neq 0$，$b\neq 0$ のとき

$L_1 :\ a^2x - aby = 2a$

$L_2 :\ +)\ b^2x + aby = -3b$

$(a^2+b^2)x = 2a-3b$

$\therefore$ 交点は $\left(\frac{2a-3b}{a^2+b^2}, \frac{-3a-2b}{a^2+b^2}\right)$

これは (i)，(ii) を含む

$\therefore$ $\left(\frac{2a-3b}{a^2+b^2}, \frac{-3a-2b}{a^2+b^2}\right)$ //