琉球大学

2012年 理系 第4問

数理 石井K

4 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n\theta\,d\theta$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とするとき，次の問に答えよ．

(1) I_1 および I_n+I_{n+2} $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を求めよ．

(2) 不等式 $I_n\geqq I_{n+1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を示せ．

(3) $\lim_{n\to\infty}nI_n$ を求めよ．

(1) $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}d\theta=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(\cos\theta)'}{\cos\theta}d\theta=-\Big[\log|\cos\theta|\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=-\log\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|=\underline{\frac{1}{2}\log 2}$ //

$$I_n+I_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n\theta+\tan^{n+2}\theta\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n\theta(1+\tan^2\theta)\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n\theta\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$$

$t=\tan\theta$ とおいて置換積分する

$dt=\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$，$\begin{array}{c||c}\theta & 0\to\frac{\pi}{4}\\ \hline t & 0\to 1\end{array}$

$$I_n+I_{n+2}=\int_0^1 t^n\,dt$$
$$=\left[\frac{1}{n+1}t^{n+1}\right]_0^1$$
$$=\underline{\frac{1}{n+1}}$$ //

(2) $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}$ において，$0\leqq\tan\theta\leqq 1$ より，

$\tan^n\theta\geqq\tan^{n+1}\theta$

よって，$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n\theta\,d\theta\geqq\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n+1}\theta\,d\theta$

すなわち，$I_n\geqq I_{n+1}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ が成り立つ ▨

(3) (2)より

$I_n\geqq I_{n+1}\geqq I_{n+2}$

これと

$I_n+I_{n+2}=\frac{1}{n+1}$ より，

$2I_n\geqq\frac{1}{n+1}$　$\therefore I_n\geqq\frac{1}{2(n+1)}$ $\cdots$①

また，$n\geqq 3$ のとき，

$I_{n-2}\geqq I_{n-1}\geqq I_n$

これと，

$I_{n-2}+I_n=\frac{1}{n-1}$ より，

$2I_n\leqq\frac{1}{n-1}$　$\therefore I_n\leqq\frac{1}{2(n-1)}$ $\cdots$②

①，②より，$n\geqq 3$ のとき

$$\frac{n}{2(n+1)}\leqq nI_n\leqq\frac{n}{2(n-1)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2(n-1)}=\frac{1}{2}$$

よって，はさみうちの原理より，

$$\underline{\lim_{n\to\infty}nI_n=\frac{1}{2}}$$ //