0002112187887999

津田塾大学

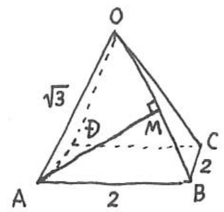
2015年 学芸（数学） 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 正方形ABCDを底面とし，頂点をOとする四角錐OABCDを考える．正方形ABCDの1辺の長さは2で，$OA = OB = OC = OD = \sqrt{3}$とする．また，AからOBに下ろした垂線をAMとする．

(1) $\overrightarrow{OA}$と$\overrightarrow{OB}$の内積，および$\overrightarrow{OA}$と$\overrightarrow{OC}$の内積を求めよ．

(2) $\angle AMC = \theta$ $(0 < \theta < \pi)$の値を求めよ．



(1) $\angle AOB = \alpha$ とおくと，

$$\cos\alpha = \frac{3+3-4}{2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \underline{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cdot\cos\alpha = 1}_{\,/\!/}$$

$AC = 2\sqrt{2}$ より．$\angle AOC = \beta$ とおくと，

$$\cos\beta = \frac{3+3-8}{2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = -\frac{1}{3}$$

$$\therefore \underline{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} = |\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OC}|\cdot\cos\beta = -1}_{\,/\!/}$$

(2) 点Mは OB上の点なので $\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB}$ （k：実数）と表せる．

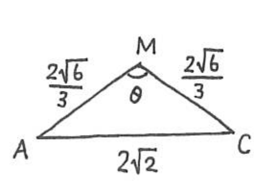
$\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{OB}$ より $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{OB} = 0$ であるから，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{OB} &= (-\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OB} \\ &= -\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} + k|\overrightarrow{OB}|^2 \\ &= 3k - 1\end{aligned}$$

$$\therefore k = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned}\therefore |\overrightarrow{AM}|^2 &= |\overrightarrow{OA}|^2 - \frac{2}{3}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} + \frac{1}{9}|\overrightarrow{OB}|^2 \\ &= \frac{8}{3}\end{aligned}$$

$\therefore |\overrightarrow{AM}| = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ 　図形の対称性より．$|\overrightarrow{AM}| = |\overrightarrow{CM}| = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$



$$\therefore \cos\theta = \frac{\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2 - (2\sqrt{2})^2}{2\cdot\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2} = -\frac{1}{2}$$

$\therefore$ θは $0 < \theta < \pi$ より． $\underline{\theta = \dfrac{2}{3}\pi}_{\,/\!/}$