富山県立大学

2010年 工学部 第2問

$\boxed{2}$ 負でない整数nに対して，$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\,dx$とする．次の問いに答えよ．

(1) I_0とI_1の値を求めよ．

(2) $I_n + I_{n+2} = \dfrac{1}{n+1}$であることを示せ．

(3) I_2とI_3の値を求めよ．

(1) $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx = [x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$

$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = \left[-\log|\cos x|\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\log\frac{1}{\sqrt{2}} = -\log 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log 2$

$\therefore$ $\underline{I_0 = \frac{\pi}{4}\ ,\ I_1 = \frac{1}{2}\log 2}$ //

(2) $n \geqq 0$のとき．

$$\begin{aligned}I_n + I_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x + \tan^{n+2} x\ dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \cdot (1+\tan^2 x)\,dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\,dx \\ &= \left[\frac{1}{n+1}\tan^{n+1} x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{1}{n+1}\end{aligned}$$ ▨

(3) (2)より，$I_0 + I_2 = 1$ $\therefore$ (1)より，$\underline{I_2 = 1 - \frac{\pi}{4}}$ //

$I_1 + I_3 = \frac{1}{2}$ $\therefore$ (1)より，$\underline{I_3 = \frac{1}{2}(1-\log 2)}$ //