鹿児島大学

2014年 第5問

数理 石井K

$-3x-\sqrt{3}y=4\sqrt{3}$
$x-\sqrt{3}y=8$
$4x=8-4\sqrt{3}$

$y=-2\sqrt{3}+3-4$

$\boxed{5}$ 次の各問いに答えよ．

(1) 座標平面上での原点を中心とする 150° の回転移動を表す行列を P とする．点 $(x,\ y)$ が P の表す移動によって，点 $(2,\ 4)$ に移ったとする．このとき，点 $(x,\ y)$ を求めよ．

(2) (1) で与えられた行列 P を考える．$P^n=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ を満たす最小の自然数 n を求めよ．

(3) 以下の各命題の反例をあげよ．また，反例になっていることを示せ．ただし，X，Y は2次の正方行列とする．

(i) $XY=YX$ が成立する．

(ii) $XY=O$ ならば，$X=O$ または $Y=O$ である．ただし，O は2次の零行列を表す．

(iii) A を逆行列 A^{-1} をもつ2次の正方行列とする．このとき，$AX=Y$ ならば，$X=YA^{-1}$ である．

(1) $P=\begin{pmatrix}\cos 150^\circ & -\sin 150^\circ\\ \sin 150^\circ & \cos 150^\circ\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y\\ \frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ $\therefore \begin{cases}-\sqrt{3}x-y=4\\ x-\sqrt{3}y=8\end{cases}$

これを解いて，$\underline{(x,y)=(2-\sqrt{3},\ -1-2\sqrt{3})}$ //

(2) $150^\circ\times n=360^\circ\times k$ (k：正の整数)　∴最小の n は $\underline{n=12}$ //

(3) (i) $X=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$，$Y=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$ とすると，

$XY=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$，$YX=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}$ となり $XY\neq YX$ ▨

(ii) $X=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，$Y=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ とすると，

$XY=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ となるが，明らかに $X\neq O$ かつ $Y\neq O$ ▨

(iii) $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$，$X=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$ とおくと，$Y=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$

$A\cdot\begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ より，$A^{-1}=\begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix}$

このとき，$YA^{-1}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1\\1&-1\end{pmatrix}\neq X$ ▨