鹿児島大学

2015年 第7問

数理 石井K

$\boxed{7}$ 整数 n $(n \geqq 4)$ に対し，2枚のコインを同時に投げる試行を繰り返し，2枚とも表が出るか，または n 回繰り返した時点で試行を終了するときの試行の回数を X_n とする．確率変数 X_n について，次の各問いに答えよ．

(1) $n-1$ 以下の自然数 k に対して，確率 $P(X_n = k)$ を求めよ．また，確率 $P(X_n > 3)$ を求めよ．

(2) 確率 $P(X_n = n)$ を n を用いて表せ．

(3) X_n の平均を E_n とかくとき，$E_{n+1} - E_n$ を求めよ．

(1) 2枚とも表が出る確率は $\frac{1}{4}$ なので

$k \leqq n-1$ のとき，$P(X_n = k) = \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)$　　$\therefore \underline{P(X_n = k) = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}}$ //

$P(X_n = 1) = \frac{1}{4}$，$P(X_n = 2) = \frac{3}{16}$，$P(X_n = 3) = \frac{9}{64}$

$\therefore$ 余事象より，$P(X_n > 3) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{3}{16} - \frac{9}{64} = \underline{\frac{27}{64}}$ //

(別) $P(X_n > 3) = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$ でもよい

(2) 余事象より，

$$P(X_n = n) = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} P(X_n = k)$$

$$= 1 - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}$$

$$= 1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}}{1 - \frac{3}{4}}$$

$$= \underline{\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}} \text{ //}$$

(3) $E_n = \left\{\sum_{k=1}^{n-1} k \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}\right\} + n \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

$\therefore E_{n+1} = \left\{\sum_{k=1}^{n-1} k \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}\right\} + n \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} + (n+1) \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n}$

$\therefore E_{n+1} - E_n = \frac{n}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} + \frac{3n+3}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} - n \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

$$= \underline{\left(\frac{3}{4}\right)^{n}} \text{ //}$$