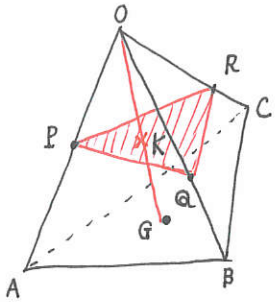
2016年 教育学部 第5問

数理 石井K

5 四面体OABCを考える．辺OAを1：1に内分する点をPとする．また辺OBを2：1に内分する点をQとして，辺OCを3：1に内分する点をRとする．さらに三角形ABCの重心をGとする．3点P，Q，Rを通る平面と線分OGの交点をKとする．線分OKとKGの長さの比を求めよ．



$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$

3点, O, K, G は一直線上にあるから, 実数 k を用いて

$\overrightarrow{OK} = k\overrightarrow{OG} = \frac{k}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$ と表せる.

このとき. $\overrightarrow{PK} = \overrightarrow{OK} - \overrightarrow{OP}$

$= \left(\frac{k}{3} - \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{OA} + \frac{k}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{k}{3}\overrightarrow{OC}$ …①

Kは平面PQR上の点,なので

$\overrightarrow{PK} = s\overrightarrow{PQ} + t\overrightarrow{PR}$ （s, tは実数）と表せる

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{OC}$ であるから

$\overrightarrow{PK} = s\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}\right) + t\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{OC}\right)$

$= -\frac{1}{2}(s+t)\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}s\overrightarrow{OB} + \frac{3}{4}t\overrightarrow{OC}$ …②

$\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ は互いに一次独立なので, ①と②より,

$$\begin{cases} \frac{k}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{s+t}{2} \\ \frac{k}{3} = \frac{2}{3}s \\ \frac{k}{3} = \frac{3}{4}t \end{cases}$$

よって, $t = \frac{4}{9}k$, $s = \frac{k}{2}$, $k = \frac{18}{29}$

$\therefore \overrightarrow{OK} = \frac{18}{29}\overrightarrow{OG}$

$\therefore OK : KG = \frac{18}{29} : 1 - \frac{18}{29} = \underline{18 : 11}$ //