

2014年第3問

3 以下の問いに答えよ。

(1) 定積分  $\int_0^\pi \cos mx \cos nx dx$  を求めよ。ただし、 $m, n$  は自然数とする。

(2)  $a$  と  $b$  を  $a < b$  を満たす実数とし、 $f(x)$  と  $g(x)$  を区間  $[a, b]$  で定義された連続な関数とする。また、

$$\int_a^b \{f(x)\}^2 dx \neq 0, \quad \int_a^b \{g(x)\}^2 dx \neq 0$$

であるとする。このとき、任意の実数  $t$  に対して

$$\int_a^b \{tf(x) + g(x)\}^2 dx \geq 0$$

が成り立つことを用いて、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\left\{ \int_a^b f(x)g(x) dx \right\}^2 \leq \left( \int_a^b \{f(x)\}^2 dx \right) \left( \int_a^b \{g(x)\}^2 dx \right)$$

また、等号が成り立つ条件は、 $k$  を定数として  $g(x) = kf(x)$  と表せるときであることを示せ。

(3)  $f(x)$  は区間  $[-\pi, \pi]$  で定義された連続な関数で  $\int_{-\pi}^\pi \{f(x)\}^2 dx = 1$  を満たす。このとき、

$$I = \int_{-\pi}^\pi f(x) \cos 2x dx$$

を最大とする  $f(x)$  とそのときの  $I$  の値を求めよ。