鹿児島大学

2014 年 第 4 問

数理 石井K

$\boxed{4}$ $0 < a < \frac{\pi}{4}$ とする．曲線 $y = \sin 2x$ 上の点 $(a,\ \sin 2a)$ における接線 ℓ_1 と点 $\left(\frac{\pi}{2} - a,\ \sin 2\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\right)$ における接線 ℓ_2 が直交しているとする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) a の値を求めよ．

(2) ℓ_1 と ℓ_2 および曲線 $y = \sin 2x$ $\left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ とで囲まれた図形の面積を求めよ．

(1) $f(x) = \sin 2x$ とおくと，$f'(x) = 2\cos 2x$

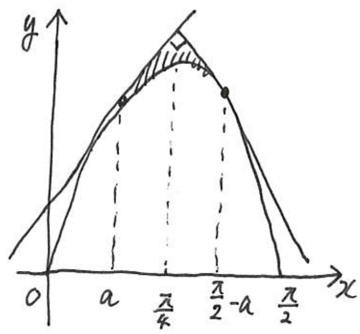
$\ell_1 \perp \ell_2 \iff f'(a) \cdot f'\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = -1$

$\therefore\ 2\cos 2a \cdot 2\cos(\pi - 2a) = -1$

$\therefore\ \cos^2 2a = \frac{1}{4}$

$0 < 2a < \frac{\pi}{2}$ より，$0 < \cos 2a < 1$ なので $\cos 2a = \frac{1}{2}$ $\quad \therefore\ \underline{a = \frac{\pi}{6}}$ //

(2) グラフの対称性より，求める面積を S とおくと，



$$S = 2\int_a^{\frac{\pi}{4}} 2\cos 2a \cdot (x - a) + \sin 2a - \sin 2x\, dx$$

$$= 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} x - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \sin 2x\, dx$$

$$= 2\left[\frac{x^2}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}\right)x + \frac{1}{2}\cos 2x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= 2\left(\frac{\pi^2}{32} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}\right)\cdot\frac{\pi}{4}\right) - 2\left(\frac{\pi^2}{72} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}\right)\cdot\frac{\pi}{6} + \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{\pi^2}{16} + \frac{\sqrt{3}}{4}\pi - \frac{\pi^2}{12} - \frac{\pi^2}{36} - \frac{\sqrt{3}}{6}\pi + \frac{\pi^2}{18} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{9 - 12 - 4 + 8}{144}\pi^2 + \frac{\sqrt{3}}{12}\pi - \frac{1}{2}$$

$$= \underline{\frac{\pi^2}{144} + \frac{\sqrt{3}}{12}\pi - \frac{1}{2}}\ //$$