

2018年医(医)・理(数理・物理・地環)・工・歯第6問

6 関数 $f(x) = \frac{\log(x+1)}{x+1}$ について、次の各問いに答えよ。ただし、 $x \geq 0$ とする。また、 $\log(x+1)$ は $x+1$ の自然対数を表す。

(1) 自然対数の底 e に対して、 $t \geq 0$ のとき $e^t > \frac{t^2}{2}$ が成立することを用いて

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(x+1)}{x+1} = 0$$

を示せ。

(2) $f(x)$ の増減、極値、グラフの凹凸および変曲点を調べて、そのグラフをかけ。

(3) 自然数 $n = 1, 2, \dots$ に対して正の数 a_n を、曲線 $y = f(x)$ と直線 $x = a_n$ および x 軸で囲まれた部分の面積が n^2 に等しくなるように定める。この a_n を求めよ。

(4) (3) で定まる数列 $\{a_n\}$ に対して、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ を求めよ。