0001354185468999

鹿児島大学

2013年 第9問

$\boxed{9}$ xy 平面において，曲線 $y=e^x$ と 3 直線 $y=x+1$，$x=1$，$x=-1$ で囲まれた部分を D とする．ただし e は自然対数の底である．次の各問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)=e^x-(x+1)$ の増減，極値，凹凸を $-1 \leqq x \leqq 1$ の範囲で調べ，増減表にまとめよ．

(2) D を図示せよ．

(3) D を x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積 V を求めよ．

(1) $f'(x)=e^x-1$　$\therefore f'(x)=0$ となるのは，$x=0$

$f''(x)=e^x>0$

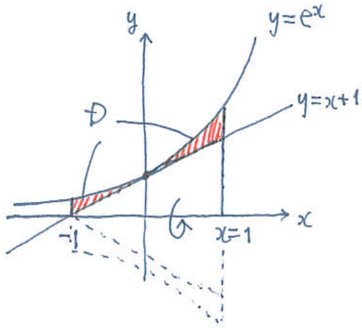
$\therefore$ 極小値は 0 ($x=0$ のとき)

増減表は右のようになる．

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$	
$f(x)$	$\frac{1}{e}$	↘	0	↗	$e-2$

(2) (1) より，$-1 \leqq x \leqq 1$ において，$f(x) \geqq 0 \iff e^x \geqq x+1$ となり，等号成立は $x=0$ のときのみ．

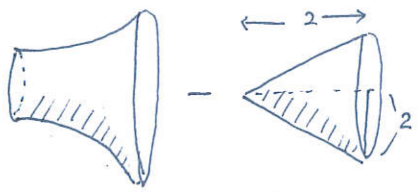
$\therefore$ 右のグラフの斜線部分が D である．(境界線を含む)



(3) 回転体は，$y=e^x$，$x=\pm 1$ で囲まれた図形を

x 軸のまわりに回転してできたものから，

円すいを引けばよいので，



円すい．

(底面の半径 2
高さ 2 の円すい)

$$\therefore V=\pi\int_{-1}^{1}(e^x)^2dx-\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 2^2\cdot 2$$

$$=\pi\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_{-1}^{1}-\frac{8}{3}\pi$$

$$=\frac{\pi}{2}e^2-\frac{\pi}{2}e^{-2}-\frac{8}{3}\pi$$

$$=\underline{\pi\left(\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2e^2}-\frac{8}{3}\right)}$$