0001824455718999

鹿児島大学

2014年 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ rを実数とする．$\{a_n\}$を

$$a_1=1,\quad a_2=3,\quad a_{n+2}=ra_{n+1}-4a_n\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定められる数列とする．次の各問いに答えよ．

(1) $r=0$の場合に，以下のそれぞれについて一般項a_nをnの式で表せ．

（i）nが奇数のとき．　（ii）nが偶数のとき．

(2) $r=5$の場合に，次の（i），（ii）に答えよ．

（i）数列$\{b_n\}$，$\{c_n\}$を

$b_n=a_{n+1}-a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$，　$c_n=a_{n+1}-4a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

で定めるとき，一般項b_n，c_nを求めよ．

（ii）一般項a_nを求めよ．

(3) $r=4$の場合に，次の（i），（ii）に答えよ．

（i）数列$\{d_n\}$を

$$d_n=\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{a_n}{2^n}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定めるとき，一般項d_nを求めよ．

（ii）一般項a_nを求めよ．

(1) $a_{n+2}=-4a_n$

(i) n:奇数のとき　$a_{n+2}=(-4)\cdot a_n=(-4)^2a_{n-2}=\cdots=(-4)^{\frac{n+1}{2}}\cdot a_1$

$\therefore\ \underline{a_n=(-4)^{\frac{n-1}{2}}}$ //　これは$n=1$のときも含む

(ii) n:偶数のとき　$a_{n+2}=(-4)\cdot a_n=(-4)^2a_{n-2}=\cdots=(-4)^{\frac{n}{2}}\cdot a_2$

$\therefore\ \underline{a_n=3\cdot(-4)^{\frac{n}{2}-1}}$ //　これは$n=2$のときも含む

(2) $a_{n+2}=5a_{n+1}-4a_n$

(i)
$$\begin{cases} b_{n+1}=4b_n \\ c_{n+1}=c_n \end{cases}$$

よって，$\{b_n\}$は初項$b_1=a_2-a_1=2$，公比4の等比数列

$\therefore\ \underline{b_n=2\cdot4^{n-1}=2^{2n-1}}$ //　$\underline{c_n=c_1=-1}$ //

(ii) $b_n-c_n=3a_n$ より

$3a_n=2^{2n-1}+1$　$\therefore\ \underline{a_n=\dfrac{2^{2n-1}+1}{3}}$ //

(3)(i)

$a_{n+2}=4a_{n+1}-4a_n$　両辺を2^{n+2}でわって

$$\frac{a_{n+2}}{2^{n+2}}=2\cdot\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{a_n}{2^n}$$

$\therefore\ d_{n+1}=d_n$　$\therefore\ d_n=d_1=\dfrac{a_2}{4}-\dfrac{a_1}{2}=\dfrac{1}{4}$

$\therefore\ \underline{d_n=\dfrac{1}{4}}$ //

(3)(ii) 数列$\left\{\dfrac{a_n}{2^n}\right\}$は初項$\dfrac{1}{2}$ 公差$\dfrac{1}{4}$の等差数列より

$$\frac{a_n}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot(n-1)$$

$\therefore\ \underline{a_n=(n+1)\cdot2^{n-2}}$ //