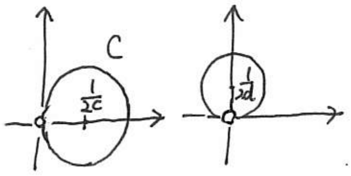
0001825184718999

鹿児島大学

2014年 第6問

$\boxed{6}$ c と d を0ではない実数とする．C と D をそれぞれ s と t を媒介変数として

$$C:\begin{cases} x=\dfrac{c}{s^2+c^2} \\ y=\dfrac{s}{s^2+c^2} \end{cases} \qquad D:\begin{cases} x=\dfrac{t}{t^2+d^2} \\ y=\dfrac{d}{t^2+d^2} \end{cases}$$



で与えられる曲線とする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) C と D は円から1点を除いた曲線になっている．それぞれの円を表す方程式と除かれる点を求めよ．

(2) C と D の交点の座標を求めよ．

(3) C と D の交点における C の接線の方程式を求めよ．

C:

(1) $c \neq 0$ より．$x \neq 0$

$\therefore \dfrac{1}{x}=\dfrac{s^2+c^2}{c}$ $\quad \therefore \dfrac{y}{x}=\dfrac{s}{c}$ $\quad \therefore s=\dfrac{cy}{x}$

$\therefore x=\dfrac{c}{\left(\frac{cy}{x}\right)^2+c^2}$ $\quad \therefore x=\dfrac{cx^2}{c^2y^2+c^2x^2}$ $\quad \therefore c^2x(x^2+y^2)-cx^2=0$

$\therefore c^2x\left(x^2+y^2-\dfrac{x}{c}\right)=0$ $\quad c\neq 0,\ x\neq 0$ より 円 $\left(x-\dfrac{1}{2c}\right)^2+y^2=\dfrac{1}{4c^2}$

$x \neq 0$より除かれるのは原点 (ただし原点を除く) //

Cのときと同様にして，Dは 円 $x^2+\left(y-\dfrac{1}{2d}\right)^2=\dfrac{1}{4d^2}$ (ただし原点は除く) //

(2) $\begin{cases} x^2+y^2-\dfrac{x}{c}=0 & \cdots ① \\ x^2+y^2-\dfrac{y}{d}=0 & \cdots ② \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+y^2-\dfrac{x}{c}=0 \\ dx=cy \quad (①-②) \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+\left(\dfrac{d}{c}x\right)^2-\dfrac{x}{c}=0 \\ dx=cy \end{cases}$

$\therefore x\left\{\left(1+\dfrac{d^2}{c^2}\right)x-\dfrac{1}{c}\right\}=0$ $\quad x\neq 0$ より $\quad x=\dfrac{c}{c^2+d^2}$ ，$y=\dfrac{d}{c^2+d^2}$

$\therefore \left(\dfrac{c}{c^2+d^2},\ \dfrac{d}{c^2+d^2}\right)$ //

(3) ①より $2x+2y\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{1}{c}=0$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{1}{2c}-x}{y}$ $\quad$ 交点において $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{1}{2c}-\frac{c}{c^2+d^2}}{\frac{d}{c^2+d^2}}=\dfrac{d^2-c^2}{2cd}$

$\therefore$ 接線は $y=\dfrac{d^2-c^2}{2cd}\left(x-\dfrac{c}{c^2+d^2}\right)+\dfrac{d}{c^2+d^2}$

$\therefore y=\dfrac{d^2-c^2}{2cd}x+\dfrac{1}{2d}$ //