

2016年医(医)・理(数理・物理・地環)・工・歯第6問

6 関数 $f(x) = (\log x)^2 - \log x$ ($x > 0$) を考える。次の各問いに答えよ。

- (1) $f(x) = 0$ を満たす x をすべて求めよ。
 (2) 導関数 $f'(x)$ および 2次導関数 $f''(x)$ をそれぞれ求めよ。また関数 $y = f(x)$ のグラフの概形を描け。ただし関数 $y = f(x)$ の増減, 凹凸, 極限 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ を明示すること。
 (3) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

$$(1) f(x) = 0 \Leftrightarrow \log x \{(\log x) - 1\} = 0$$

$$\Leftrightarrow \log x = 0, 1$$

$$\Leftrightarrow \underline{x = 1, e}$$

$$(2) f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \log x - \frac{1}{x} = \frac{2 \log x - 1}{x}$$

$$f''(x) = \frac{2 \cdot \frac{1}{x} \cdot x - (2 \log x - 1)}{x^2}$$

$$= \frac{3 - 2 \log x}{x^2}$$

$f'(x) = 0$ となるのは、
 $x = \sqrt{e}$ のとき。

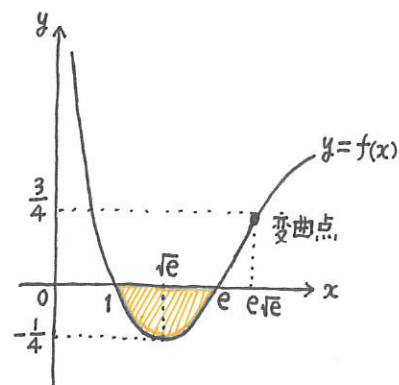
$f''(x) = 0$ となるのは、
 $x = e\sqrt{e}$ のとき。

x	(0)	\dots	\sqrt{e}	\dots	$e\sqrt{e}$	\dots	(∞)
$f(x)$		-	0	+	+	+	
$f'(x)$		+	+	+	0	-	
$f(x)$	(∞)	\searrow	$-\frac{1}{4}$	\nearrow	$\frac{3}{4}$	\nearrow	(∞)

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \log x \{(\log x) - 1\} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \log x \{(\log x) - 1\} = \infty$$

右の増減表より、 $y = f(x)$ のグラフは右のようになる。



$$(3) S = \int_1^e \log x - (\log x)^2 dx$$

$$= \int_1^e (x)' \log x dx - \int_1^e (x)' (\log x)^2 dx \quad \text{部分積分}$$

$$= [x \log x]_1^e - \int_1^e dx - [x (\log x)^2]_1^e + \int_1^e 2 \log x dx$$

$$= 3e - 3(e-1) - e$$

$$= \underline{3 - e}$$