00000458181459999

鹿児島大学

2011 年 第 4 問

数理 石井K

$\boxed{4}$ $f(x)$ は数直線上の連続関数で，次の条件 (i) と (ii) をみたすものとする．

(i) $f(x)$ は周期 1 の周期関数，すなわち，すべての x で $f(x+1)=f(x)$ が成り立つ．

(ii) $\int_0^1 f(x)\,dx=0$

次の各問いに答えよ．

(1) 条件 (i) と (ii) をみたす恒等的に 0 でない連続関数 $f(x)$ の例を 1 つ挙げよ．

(2) $F(x)=\int_0^x f(y)\,dy$ とおくと，$F(x)$ も周期 1 の周期関数であることを示せ．

(3) $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，$\frac{d}{dx}F(nx)$ を f を用いて表せ．

(4) 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n=\int_0^1 xf(nx)\,dx \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

と定める．$\lim_{n\to\infty} a_n=0$ を示せ．

(1) $f(x)=\sin 2\pi x$ とすると．$f(x+1)=\sin 2\pi(x+1)=\sin 2\pi x=f(x)$ ∴ (i) をみたす．

$\int_0^1 f(x)\,dx=\left[-\cos x\right]_0^1=-1+1=0$ ∴ (ii) をみたす．

よって．$f(x)$ の例は $\underline{f(x)=\sin 2\pi x}$ //

(2) $F(x+1)=\int_0^{x+1} f(y)\,dy=\underbrace{\int_0^1 f(y)\,dy}_{\text{(ii) より } 0}+\underbrace{\int_1^{x+1} f(y)\,dy}_{\text{(i) より } =\int_1^{x+1} f(y+1)dy=\int_0^x f(y)dy}$

$=F(x)$

∴ $F(x)$ も周期 1 の周期関数 ■

(3) $\frac{d}{dx}F(nx)=\frac{d}{dx}\int_0^{nx} f(y)\,dy=\underline{nf(nx)}$ //

(4) (3) より．

$a_n=\int_0^1 xf(nx)\,dx=\int_0^1 x\left\{\frac{1}{n}F(nx)\right\}'dx=\left[\frac{x}{n}F(nx)\right]_0^1-\underline{\int_0^1\frac{1}{n}F(nx)\,dx}$

$t=nx$ とおいて

置換積分

$dt=n\cdot dx$

x	$0\to 1$
t	$0\to n$

∴ $a_n=\frac{1}{n}F(n)-\int_0^n\frac{1}{n^2}F(t)\,dt$

ここで，$F(n)=F(n-1)=\cdots=F(1)=\int_0^1 f(y)\,dy=0$ より

$a_n=-\frac{1}{n^2}\cdot\int_0^n F(t)\,dt$

$F(x)$：周期 1 の周期関数より．

$\int_0^n F(t)\,dt=n\int_0^1 F(t)\,dt$

∴ $\lim_{n\to\infty} a_n=-\frac{1}{n}\underbrace{\int_0^1 F(t)\,dt}_{\text{定数．}}=0$ ■