2015年 理系 第2問

$\boxed{2}$ △ABCの外心をO，重心をGとする．$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とし，

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=5,\quad 4\overrightarrow{AG}+3\overrightarrow{BG}+5\overrightarrow{CG}=12\overrightarrow{OG}$$

をみたすとする．次の問いに答えよ．

(1) $4\vec{a}+3\vec{b}+5\vec{c}=\vec{0}$ を示せ．

(2) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$ および $\vec{c}\cdot\vec{a}$ を求めよ．

(3) $|\overrightarrow{OG}|$ の値を求めよ．

(1) $4\overrightarrow{AG}+3\overrightarrow{BG}+5\overrightarrow{CG}=4(\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OA})+3(\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OB})+5(\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OC})$

$=12\overrightarrow{OG}-4\vec{a}-3\vec{b}-5\vec{c}$

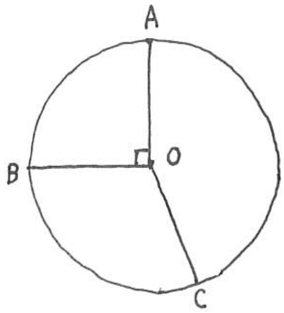
$\therefore$ $4\overrightarrow{AG}+3\overrightarrow{BG}+5\overrightarrow{CG}=12\overrightarrow{OG}$ より，$4\vec{a}+3\vec{b}+5\vec{c}=\vec{0}$ ▨

(2) (1)より，

$4\vec{a}+3\vec{b}=-5\vec{c}$ $\quad\therefore 16|\vec{a}|^2+24\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2=25|\vec{c}|^2$

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=5$ より，$\underline{\vec{a}\cdot\vec{b}=0}$ //

他も同様に計算して，$\underline{\vec{b}\cdot\vec{c}=-15,\ \vec{c}\cdot\vec{a}=-20}$ //



(3) $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$ より

$|\overrightarrow{OG}|^2=\frac{1}{9}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{c}\cdot\vec{a})$

$=\frac{1}{9}(25+25+25+0-30-40)$

$=\frac{5}{9}$

$\therefore$ $\underline{|\overrightarrow{OG}|=\frac{\sqrt{5}}{3}}$ //