昭和大学

2016年 歯学部・薬学部・保健医療 第5問

数理 石井K

$\boxed{5}$ $a_1=0$，$a_{n+1}=3a_n+5^n$ $(n \geqq 1)$で定義される数列$\{a_n\}$がある．以下の各問いに答えよ．

(1) $\dfrac{a_n}{3^n}=b_n$とおくとき，$b_{n+1}-b_n$をnの式で表せ．

(2) b_nをnで表せ．

(3) a_nをnで表せ．

(1) 漸化式の両辺を3^{n+1}で割ると．

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\frac{a_n}{3^n}+\frac{5^n}{3\cdot 3^n}$$

$$\therefore\ b_{n+1}=b_n+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^n$$

$$\therefore\ \underline{b_{n+1}-b_n=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^n}\ //$$

(2) $b_1=\dfrac{a_1}{3}=0$，

$n \geqq 2$のとき．

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^k$$

$$=0+\frac{1}{3}\cdot\frac{\frac{5}{3}\left\{1-\left(\frac{5}{3}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{5}{3}}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^n-\frac{5}{6}$$

これは$n=1$のときも成り立っている

$$\therefore\ \underline{b_n=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^n-\frac{5}{6}}\ //$$

(3) $$\frac{a_n}{3^n}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^n-\frac{5}{6}$$

$$\therefore\ a_n=\frac{5^n}{2}-\frac{5}{6}\cdot 3^n$$

$$\therefore\ \underline{a_n=\frac{3\cdot 5^n-5\cdot 3^n}{6}}\ //$$