福岡大学

2013 年 理系 第 5 問

5 数列 $\{a_n\}$ は第 2 項が 7，第 10 項が 23 の等差数列である．初項から第 n 項までの和を S_n とすると，$S_n=$ $\boxed{}$ である．また，$b_n=\dfrac{1}{S_n+3}$ とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}b_k$ の値は $\boxed{}$ である．

a_n の初項を a，公差を d とおくと．$a_n=a+(n-1)d$

$$\therefore \begin{cases} a_2=a+d=7 \\ a_{10}=a+9d=23 \end{cases} \iff \begin{cases} a=5 \\ d=2 \end{cases} \qquad \therefore a_n=2n+3$$

$$\therefore S_n=\frac{n}{2}(5+2n+3)=\underline{n^2+4n}\,/\!/$$

$$b_n=\frac{1}{S_n+3}=\frac{1}{(n+1)(n+3)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right)$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n}b_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{6}}\right)+\frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{1}{5}}-\cancel{\frac{1}{7}}\right)+$$

$$\cdots+\frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+2}\right)+\frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{1}{n+1}}-\frac{1}{n+3}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\underbrace{\frac{1}{n+2}}_{\to 0}-\underbrace{\frac{1}{n+3}}_{\to 0}\right)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}b_k=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$$

$$=\underline{\frac{5}{12}}\,/\!/$$