福井大学

2014年 第1問

数理 石井K

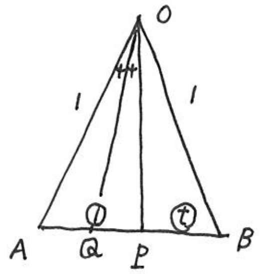
$\boxed{1}$ △OABは OA = OB = 1を満たす二等辺三角形とする．t を $\frac{1}{2} < t < 1$ を満たす定数とし，辺ABを $1:t$ に内分する点をP，∠AOPの二等分線と辺ABとの交点をQとする．$\vec{a} = \overrightarrow{OA}$，$\vec{b} = \overrightarrow{OB}$，$k = $ OP とおくとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ と t を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{OQ}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ と t，k を用いて表せ．

(3) AQ = BP が成り立つとする．k を t を用いて表せ．また内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を t を用いて表せ．

(1) $\overrightarrow{OP} = \dfrac{t}{1+t}\vec{a} + \dfrac{1}{1+t}\vec{b}$ //



(2) AQ : QP = 1 : k より．

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{k}{1+k}\vec{a} + \frac{1}{1+k}\overrightarrow{OP}$$

$$= \frac{k}{1+k}\vec{a} + \frac{t}{(1+k)(1+t)}\vec{a} + \frac{1}{(1+k)(1+t)}\vec{b}$$

$$= \frac{kt+k+t}{(1+k)(1+t)}\vec{a} + \frac{1}{(1+k)(1+t)}\vec{b}$$ //

(3) AQ = BP のとき．図形の対称性より．

$$\frac{t}{1+t} = \frac{1}{(1+k)(1+t)} \quad かつ \quad \frac{1}{1+t} = \frac{kt+k+t}{(1+k)(1+t)}$$

$$\therefore t = \frac{1}{kt+k+t} \qquad \therefore k = \frac{1-t}{t}$$ //

$OP^2 = k^2$ より． $\left(\dfrac{t}{1+t}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{1+t}\right)^2 + \dfrac{2t}{(1+t)^2}\vec{a}\cdot\vec{b} = k^2$

∴両辺に $(1+t)^2$ をかけて． $t^2 + 1 + 2t\,\vec{a}\cdot\vec{b} = \dfrac{(1+t)^2(1-t)^2}{t^2}$

$$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{1-3t^2}{2t^3}$$ //