2010年 商学部 第4問

$\boxed{4}$ 関数 $f(x)$ が，次の（ｉ），（ii）を満たしている．

（ｉ）$f(0) \neq 0$ である．

（ii）すべての実数 x，y に対して，$f(x)+f(y)=2f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\times f\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$ が成立する．

$f(p)=f(q)$ のとき，次の (1)〜(3) に答えよ．

(1) $f(0)=1$ を示せ．

(2) $f(p+q)+f(p-q)$ を $f(p)$ を用いて表せ．

(3) $f(p+q)=1$ または $f(p-q)=1$ が成立することを示せ．

(1) (ii) に $x=y=0$ を代入して． $2f(0)=2\{f(0)\}^2$ $\therefore f(0)\{1-f(0)\}=0$

(i) より $f(0)\neq 0$ なので，$f(0)=1$ ▨

(2) (ii) に $x=p+q$，$y=p-q$ を代入して， $f(p+q)+f(p-q)=2f(p)\times f(q)$

$f(p)=f(q)$ より． $\underline{f(p+q)+f(p-q)=2\{f(p)\}^2}$ //

(3) $\{f(p+q)-1\}\{f(p-q)-1\} = f(p+q)\cdot f(p-q)-\{f(p+q)+f(p-q)\}+1$

(2)より $= f(p+q)\cdot f(p-q)-2\{f(p)\}^2+1 \quad \cdots (*)$

ここで (ii) に $x=2p$，$y=2q$ を代入して．

$$f(2p)+f(2q)=2f(p+q)\times f(p-q) \quad \cdots ①$$

また，(ii) に $x=2p$，$y=0$ を代入して．

$$f(2p)+1=2f(p)\times f(p) \quad \cdots ②$$

同様に $f(2q)+1=2f(q)\times f(q) \cdots ③$

① に ②，③ を代入して．

$$f(p+q)\cdot f(p-q)=\frac{1}{2}\left\{2\{f(p)\}^2-1+2\{f(q)\}^2-1\right\}$$

$$=2\{f(p)\}^2-1$$

これを (*) に代入して． $\{f(p+q)-1\}\{f(p-q)-1\}=0$

$\therefore$ $f(p+q)=1$ または． $f(p-q)=1$ が成り立つ ▨