0000140099589999

金沢大学

2011年 文系 第2問　　1枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{2}$ 実数 x に対して，関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \int_0^2 |t - x|\, dt$$

とおく．次の問いに答えよ．

(1) 関数 $y = f(x)$ を求め，そのグラフをかけ．

(2) $y = f(x)$ の接線で傾きが1のものを ℓ とする．ℓ の方程式を求めよ．

(3) 直線 $x = -1$，接線 ℓ，曲線 $y = f(x)$ で囲まれた図形の面積を求めよ．

(1) (i) $x \leqq 0$ のとき．$0 \leqq t \leqq 2$ において，$t - x \geqq 0$

$$\therefore\ f(x) = \int_0^2 t - x\, dt = \left[\frac{t^2}{2} - xt\right]_0^2 = -2x + 2$$

(ii) $0 < x < 2$ のとき．$0 \leqq t \leqq x$ において，$t - x \leqq 0$，$x \leqq t \leqq 2$ において，$t - x \geqq 0$

$$\therefore\ f(x) = \int_0^x x - t\, dt + \int_x^2 t - x\, dt$$

$$= \left[xt - \frac{t^2}{2}\right]_0^x + \left[\frac{t^2}{2} - xt\right]_x^2$$

$$= x^2 - \frac{x^2}{2} + 2 - 2x - \left(\frac{x^2}{2} - x^2\right)$$

$$= x^2 - 2x + 2$$

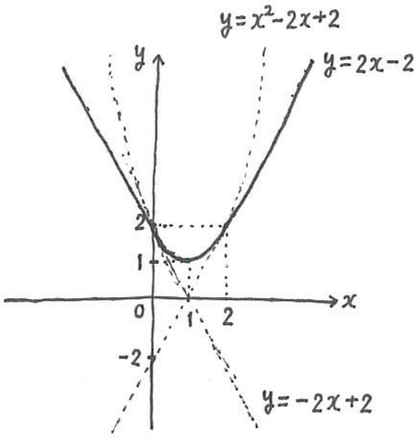
(iii) $x \geqq 2$ のとき．$0 \leqq t \leqq 2$ において，$t - x \leqq 0$

$$\therefore\ f(x) = \int_0^2 x - t\, dt = \left[xt - \frac{t^2}{2}\right]_0^2 = 2x - 2$$

(i)～(iii) より，

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 2 & (x \leqq 0 \text{ のとき}) \\ x^2 - 2x + 2 & (0 < x < 2 \text{ のとき}) \\ 2x - 2 & (x \geqq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$ //

よって，グラフは右のようになる．



(2) 直線部分の傾きはそれぞれ ± 2 なので，接点は放物線部分にあり，

$(s,\ s^2 - 2s + 2)$ ただし，$0 < s < 2$ とおくことができる．

$f'(x) = 2x - 2\ (0 < x < 2)$ より，$2s - 2 = 1$　$\therefore\ s = \dfrac{3}{2}$

$\therefore$ 接点は $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{4}\right)$　$\therefore\ \ell : y = x - \dfrac{1}{4}$ //

2枚目につづく

2011 年 文系 第 2 問　　2枚目／2枚

$\boxed{2}$ 実数 x に対して，関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\int_0^2 |t-x|\,dt$$

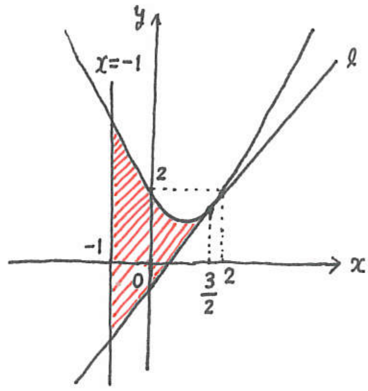
とおく．次の問いに答えよ．

(1) 関数 $y=f(x)$ を求め，そのグラフをかけ．

(2) $y=f(x)$ の接線で傾きが 1 のものを ℓ とする．ℓ の方程式を求めよ．

(3) 直線 $x=-1$，接線 ℓ，曲線 $y=f(x)$ で囲まれた図形の面積を求めよ．

(3) 求める面積を S とおくと，右図より，



$$S=\int_{-1}^{0} -2x+2-\left(x-\frac{1}{4}\right)dx+\int_0^{\frac{3}{2}} x^2-2x+2-\left(x-\frac{1}{4}\right)dx$$

$$=\int_{-1}^{0} -3x+\frac{9}{4}\,dx+\int_0^{\frac{3}{2}} x^2-3x+\frac{9}{4}\,dx$$

$$=\left[-\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{4}x\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{4}x\right]_0^{\frac{3}{2}}$$

$$=-\left(-\frac{3}{2}-\frac{9}{4}\right)+\frac{1}{3}\cdot\frac{27}{8}-\frac{3}{2}\cdot\frac{9}{4}+\frac{27}{8}$$

$$=\frac{15}{4}+\frac{9}{8}-\frac{27}{8}+\frac{27}{8}$$

$$=\underline{\frac{39}{8}}\ /\!/$$