



2011年理系第4問

4 平面上で、線分 AB を $1:2$ に内分する点を O とし、 O を中心とする半径 OB の円を S 、円 S と直線 AB との交点のうち点 B と異なる方を C とする。点 P は円 S の内部にあり、線分 BC 上にないものとする。円 S と直線 PB との交点のうち点 B と異なる方を Q とする。 $\overrightarrow{PA} = \vec{a}$ 、 $\overrightarrow{PB} = \vec{b}$ 、 $\angle APB = \theta$ とおくとき、次の問いに答えよ。

(1) \overrightarrow{PO} 、 \overrightarrow{PC} 、 \overrightarrow{OB} を \vec{a} 、 \vec{b} で表せ。

(2) 点 P が円 S の内部にあることを用いて、 $\cos \theta < \frac{|\vec{b}|}{4|\vec{a}|}$ を証明せよ。

(3) PQ の長さを $|\vec{a}|$ 、 $|\vec{b}|$ 、 θ で表せ。

(4) $PA = 3$ 、 $PB = 2$ とする。 $\triangle QAB = 3\triangle POB$ を満たすとき、 $\triangle PAB$ の面積を求めよ。