0001684545138999

神奈川大学

2013年 理系 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 曲線 $C: y = x^3$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ t^3)$ における接線を ℓ とする．ℓ の P とは異なる C との交点を Q とし，C と ℓ とで囲まれた部分を S とする．このとき，次の問いに答えよ．ただし，$t > 0$ とする．

(1) 接線 ℓ の方程式と，点 Q の座標を求めよ．

(2) 原点 O と 2 点 P，Q の中点を通る直線を m とする．m の方程式を求めよ．

(3) (2) の直線 m により S は 2 つの部分に分けられる．x 軸で $x > 0$ の一部を含む部分の面積を s_1 とし，もう一方の面積を s_2 とする．このとき $\dfrac{s_1}{s_2}$ を求めよ．

(1) $y' = 3x^2$ より，$\ell: y = 3t^2(x-t) + t^3$　　$\therefore \underline{\ell: y = 3t^2x - 2t^3}$ //

(2) $x^3 - 3t^2x + 2t^3 = 0 \iff (x-t)^2(x+2t) = 0$

$\iff x = t,\ -2t$

$P \neq Q$ より．$Q(-2t,\ -8t^3)$

$\therefore$ PQ の中点は $\left(\dfrac{t-2t}{2},\ \dfrac{t^3-8t^3}{2}\right) = \left(-\dfrac{t}{2},\ -\dfrac{7}{2}t^3\right)$

$\therefore m: y = \dfrac{-\frac{7}{2}t^3 - 0}{-\frac{t}{2} - 0}x$　　$\therefore \underline{m: y = 7t^2x}$ //

(3) $s_1 + s_2 = \displaystyle\int_{-2t}^{t} x^3 - 3t^2x + 2t^3\,dx$

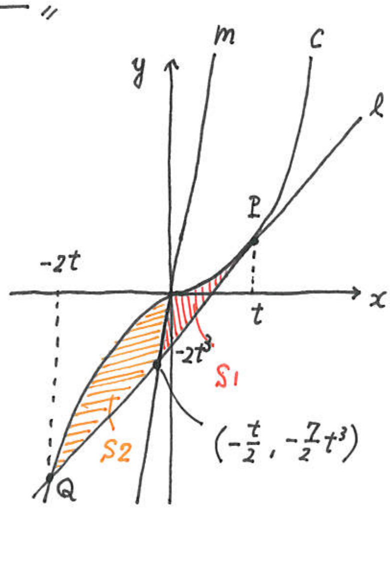
$= \left[\dfrac{x^4}{4} - \dfrac{3}{2}t^2x^2 + 2t^3x\right]_{-2t}^{t}$

$= \dfrac{27}{4}t^4$

$s_1 = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{t}{2}\cdot 2t^3 + \displaystyle\int_0^t x^3 - 3t^2x + 2t^3\,dx$

$= \dfrac{t^4}{2} + \dfrac{t^4}{4} - \dfrac{3}{2}t^4 + 2t^4$

$= \dfrac{5}{4}t^4$



$\therefore \dfrac{s_1}{s_2} = \dfrac{\frac{5}{4}t^4}{\frac{27}{4}t^4 - \frac{5}{4}t^4} = \underline{\dfrac{5}{22}}$ //