神奈川大学

2014年 理系 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ $a_1 = -\frac{1}{2}$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{3^n}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定められた数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ．

(1) $b_n = a_n + \frac{k}{3^n}$ で定まる数列 $\{b_n\}$ が $b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n$ を満たすとき，定数 k の値を求めよ．

(2) (1) で求めた k に対して，一般項 b_n を求めよ．

(3) 一般項 a_n と $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を求めよ．

(1) $a_{n+1} + \frac{k}{3^{n+1}} = \frac{1}{2}a_n + \frac{k}{2\cdot 3^n}$ $\therefore$ $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \left(\frac{k}{2\cdot 3^n} - \frac{k}{3^{n+1}}\right)$

$\therefore$ 漸化式と比較して． $\frac{k}{2\cdot 3^n} - \frac{k}{3^{n+1}} = \frac{1}{3^n}$

$\therefore$ 両辺に 3^n をかけて． $\frac{k}{2} - \frac{k}{3} = 1$ $\therefore$ $\underline{k = 6}$ //

(2) $\{b_n\}$ は初項 $b_1 = a_1 + \frac{k}{3} = \frac{3}{2}$，公比 $\frac{1}{2}$ の数列なので，

$b_n = \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \underline{\frac{3}{2^n}}$ //

(3) (2) より．

$a_n + \frac{6}{3^n} = \frac{3}{2^n}$ $\therefore$ $a_n = \frac{3}{2^n} - \frac{6}{3^n} = \underline{\frac{3^{n+1} - 3\cdot 2^{n+1}}{6^n}}$ //

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2^n} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{3^n}$$

$$= \frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{1}{2}} - \frac{2}{1-\frac{1}{3}}$$

$$= 3 - 3$$

$$= \underline{0}$$ //