0002132277687999

神奈川大学

2015年 理系 第2問

$\boxed{2}$ 辺の長さが1の正方形を S_1 とし，S_1 に内接する円を C_1，C_1 に内接するひとつの正方形を S_2，S_2 に内接する円を C_2 とする．以下同様に，自然数 n に対し，正方形 S_n，円 C_n を定める．すなわち，正方形 S_n の内接円が C_n であり，正方形 S_{n+1} は円 C_n に内接している．このとき，次の問いに答えよ．

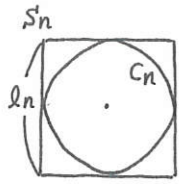
(1) S_n の辺の長さを l_n とするとき，C_n の半径を l_n で表せ．

(2) 数列 $\{l_n\}$ の一般項を求めよ．

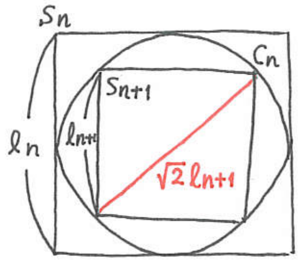
(3) S_n の内部から C_n の内部を除いた部分の面積を a_n とする．$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を求めよ．

(1) 右の図より，C_n の半径は，

$\underline{\frac{1}{2}l_n}$ //



(2)



上の図より，S_{n+1} の対角線の長さは $\sqrt{2}l_{n+1}$ であり，

これは，円 C_n の直径に等しいから

$$l_n = \sqrt{2}l_{n+1}$$

$$\therefore l_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}l_n$$

$\therefore$ 数列 $\{l_n\}$ は初項 1，公比 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ の等比数列より，$\underline{l_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}}$ //

(3) $a_n = l_n^2 - \pi\cdot\left(\frac{1}{2}l_n\right)^2 = \left(1-\frac{\pi}{4}\right)l_n^2 = \left(1-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}\right\}^2 = \left(1-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\frac{1}{2^{n-1}}$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$= \left(1-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}$$

$$= \underline{2-\frac{\pi}{2}}$$ //