

2014年第3問

3 以下の問いに答えよ。

(1) 定積分 $\int_0^{\pi} \cos mx \cos nx dx$ を求めよ。ただし、 m, n は自然数とする。

(2) a と b を $a < b$ を満たす実数とし、 $f(x)$ と $g(x)$ を区間 $[a, b]$ で定義された連続な関数とする。また、

$$\int_a^b \{f(x)\}^2 dx \neq 0, \quad \int_a^b \{g(x)\}^2 dx \neq 0$$

であるとする。このとき、任意の実数 t に対して

$$\int_a^b \{tf(x) + g(x)\}^2 dx \geq 0$$

が成り立つことを用いて、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\left\{ \int_a^b f(x)g(x) dx \right\}^2 \leq \left(\int_a^b \{f(x)\}^2 dx \right) \left(\int_a^b \{g(x)\}^2 dx \right)$$

また、等号が成り立つ条件は、 k を定数として $g(x) = kf(x)$ と表せるときであることを示せ。

(3) $f(x)$ は区間 $[-\pi, \pi]$ で定義された連続な関数で $\int_{-\pi}^{\pi} \{f(x)\}^2 dx = 1$ を満たす。このとき、

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos 2x dx$$

を最大とする $f(x)$ とそのときの I の値を求めよ。