

2016年第4問

1枚目/3枚

4 n を正の整数とする. $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k \cdot 2^k}$ とおく. 以下の間に答えよ. ただし, \log は自然対数を表す.

(1) $1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x}$ を数学的帰納法を用いて証明せよ. ただし, $x \neq 1$ とする.

(2) $\int_0^{\frac{1}{2}} (1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}) dx = \log 2 - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x} dx$ を示せ.

(3) $S_n = \log 2 - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x} dx$ を示せ.

(4) $0 \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x} dx \leq \frac{1}{2^n} \log 2$ を示せ.

(5) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \cdots$ の値を求めよ.

(i) 数学的帰納法により証明する.

$$(i) n=1 \text{ のとき. } (\text{左辺}) = 1, (\text{右辺}) = \frac{1-x}{1-x} = 1 \quad \therefore n=1 \text{ のとき成り立つ.}$$

(ii) $n=k$ のとき成り立つと仮定すると.

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{k-1} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^k}{1-x} \quad \cdots (*)$$

(*) の両辺に x^k を加えて.

$$\begin{aligned} 1 + x + x^2 + \cdots + x^{k-1} + x^k &= \frac{1}{1-x} - \frac{x^k}{1-x} + x^k \\ &= \frac{1}{1-x} - \frac{x^k(1-(1-x))}{1-x} \\ &= \frac{1}{1-x} - \frac{x^{k+1}}{1-x} \end{aligned}$$

$\therefore n=k+1$ のときも成り立つ.

(i), (ii) より, すべての正の整数について, 当式は成り立つ. \blacksquare

(2) (i) より,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x} dx$$

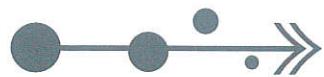
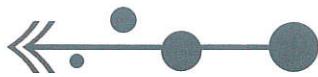
$$= \int_0^{\frac{1}{2}} -\frac{1}{x-1} dx - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x} dx$$

$$= \left[-\log|x-1| \right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x} dx$$

$$= \log 2 - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x} dx$$

\blacksquare

2枚目へつづく



2016年第4問

2枚目/3枚

数理
石井K

4 n を正の整数とする。 $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k \cdot 2^k}$ とおく。以下の間に答えよ。ただし、 \log は自然対数を表す。

(1) $1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x}$ を数学的帰納法を用いて証明せよ。ただし、 $x \neq 1$ とする。

(2) $\int_0^{\frac{1}{2}} (1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}) dx = \log 2 - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x} dx$ を示せ。

(3) $S_n = \log 2 - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x} dx$ を示せ。

(4) $0 \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x} dx \leq \frac{1}{2^n} \log 2$ を示せ。

(5) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \cdots$ の値を求めよ。

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \int_0^{\frac{1}{2}} (1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}) dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^n x^{k-1} dx \\
 &= \sum_{k=1}^n \int_0^{\frac{1}{2}} x^{k-1} dx \\
 &= \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{k} x^k \right]_0^{\frac{1}{2}} \\
 &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k \cdot 2^k} \\
 &= S_n
 \end{aligned}$$

したがって、(2)より。 $S_n = \log 2 - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x} dx$ □

(4) $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ において、 $x^n \geq 0$, $1-x > 0$ より。 $0 \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x} dx$

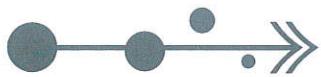
$\frac{x^n}{1-x} \geq 0$ ので

一方、 $\frac{x^n}{1-x} \leq \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-x}$ であるから。

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x} dx &\leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{1-x} dx \\
 &= \frac{1}{2^n} \left[-\log|1-x| \right]_0^{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{1}{2^n} \log 2
 \end{aligned}$$

以上をあわせて、 $0 \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x} dx \leq \frac{1}{2^n} \log 2$ □

3枚目へつづく



2016年第4問

3枚目/3枚

4 n を正の整数とする。 $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k \cdot 2^k}$ とおく。以下の間に答えよ。ただし、 \log は自然対数を表す。

(1) $1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x}$ を数学的帰納法を用いて証明せよ。ただし、 $x \neq 1$ とする。

(2) $\int_0^{\frac{1}{2}} (1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}) dx = \log 2 - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x} dx$ を示せ。

(3) $S_n = \log 2 - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x} dx$ を示せ。

(4) $0 \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x} dx \leq \frac{1}{2^n} \log 2$ を示せ。

(5) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \cdots$ の値を求めよ。

(5) (3), (4) より。

$$\log 2 - \frac{1}{2^n} \log 2 \leq S_n \leq \log 2$$

$n \rightarrow \infty$ のとき、 $\frac{1}{2^n} \log 2 \rightarrow 0$ であるから。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\log 2 - \frac{1}{2^n} \log 2 \right) = \log 2,$$

さて、はさみうちの原理より。

$$\underline{\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \log 2},$$