滋賀大学

2013年 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 関数 $f(x)$ は $f'(x)=18\int_0^1 xf(t)\,dt+1$ を満たす．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\int_0^1 f(x)\,dx=0$ のとき，$f(x)$ を求めよ．

(2) $\int_0^1 f(x)\,dx \neq 0$ であり，方程式 $f(x)=0$ はただ1つの実数解をもつ．このとき，$f(x)$ を求めよ．

(1) $f'(x)=18x\int_0^1 f(t)\,dt+1$ $\cdots$ (*)

$\therefore \int_0^1 f(x)\,dx=0$ のとき. $f'(x)=1$ $\therefore f(x)=x+C$ （Cは定数）とおける

$\therefore \int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 x+C\,dx$

$=\left[\frac{x^2}{2}+Cx\right]_0^1$

$=\frac{1}{2}+C$

$\therefore C=-\frac{1}{2}$ となり. $\underline{f(x)=x-\frac{1}{2}}$ //

(2) $\int_0^1 f(x)\,dx=a\ (\neq 0)$ とおくと. (*)より.

$f'(x)=18ax+1$ $\therefore f(x)=9ax^2+x+b$ （bは定数）とおける.

$\therefore a=\int_0^1 9ax^2+x+b\,dx$

$=\left[3ax^3+\frac{x^2}{2}+bx\right]_0^1$

$=3a+\frac{1}{2}+b$ $\therefore 2a+b=-\frac{1}{2}$ $\cdots$ ①

また，$f(x)=0$ がただ1つの実数解をもつことより. 判別式を D とおくと.

$D=1-4\cdot 9a\cdot b=0$ $\therefore ab=\frac{1}{36}$ $\cdots$ ②

②に①を代入して. $a\left(-2a-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{36}$ $\therefore 2a^2+\frac{1}{2}a+\frac{1}{36}=0$

$\therefore \left(2a+\frac{1}{6}\right)\left(a+\frac{1}{6}\right)=0$ $\therefore a=-\frac{1}{12},\ -\frac{1}{6}$ $\therefore (a,b)=\left(-\frac{1}{12},-\frac{1}{3}\right),\left(-\frac{1}{6},-\frac{1}{6}\right)$

$\therefore \underline{f(x)=-\frac{3}{4}x^2+x-\frac{1}{3},\ -\frac{3}{2}x^2+x-\frac{1}{6}}$ //