0001632277638999

横浜国立大学

2014年 経済 第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ a, bを実数とする．xy平面上の曲線$C: y = x^3 + ax^2 + x - 2$と直線$\ell: y = bx - 2$が異なる3点で交わるとき，次の問いに答えよ．

(1) a, bの条件を求めよ．

(2) 3つの交点それぞれにおけるCの接線の中に，傾きが1より大きいものと，1より小さいものがどちらも存在するためのa, bの条件を求め，その条件をみたすab平面上の点(a, b)の範囲を図示せよ．

(1) $x^3 + ax^2 + x - 2 - (bx - 2) = 0$ が異なる3つの実数解をもつ．

$\therefore$ $x(x^2 + ax + 1 - b) = 0$ が異なる3つの実数解をもつ

$\Leftrightarrow$ $x^2 + ax + 1 - b = 0$ が $x = 0$ 以外の異なる2つの実数解をもつ

$\Leftrightarrow$ 判別式 $D = a^2 - 4(1-b) > 0$ かつ $1 - b \neq 0$

$\Leftrightarrow$ $\underline{a^2 + 4b > 4 \text{ かつ } b \neq 1}$ //

(2) $y' = 3x^2 + 2ax + 1$ より．点$(0, -2)$における接線の傾きは 1

$\therefore$ $x^2 + ax + 1 - b = 0$ の解を α, β とおくと．(1)の条件をみたすとき．

$\{(3\alpha^2 + 2a\alpha + 1) - 1\}\{(3\beta^2 + 2a\beta + 1) - 1\} < 0$ となればよい．

$\therefore$ $\alpha\beta(3\alpha + 2a)(3\beta + 2a) < 0$

$\Leftrightarrow$ $\alpha\beta(9\alpha\beta + 6a\alpha + 6a\beta + 4a^2) < 0$

$\Leftrightarrow$ $\alpha\beta\{9\alpha\beta + 6a(\alpha + \beta) + 4a^2\} < 0$

解と係数の関係より，$\alpha + \beta = -a$, $\alpha\beta = 1 - b$ なので

$(1-b)\{9(1-b) - 6a^2 + 4a^2\} < 0$

$\Leftrightarrow$ $(1-b)\{9(1-b) - 2a^2\} < 0$

(i) $b > 1$ のとき．$b < -\frac{2}{9}a^2 + 1$

(ii) $b < 1$ のとき $b > -\frac{2}{9}a^2 + 1$

$\therefore$ 右のグラフの斜線部分（境界線は含まない）