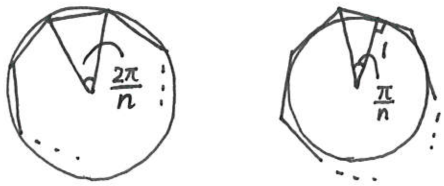
2013年 理系 第2問

$\boxed{2}$ nを3以上の自然数とする．平面上の点Oを中心とする半径1の円に内接する正n角形の面積をa_n，外接する正n角形の面積をb_nとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) a_nを求めよ．

(2) b_nを求めよ．

(3) $\dfrac{b_n}{a_n} < \dfrac{4}{3}$となる最小の$n$を求めよ．



補足：円に内接する正n角形とは，円周をn等分して隣り合う点を線分で結んでできる正n角形をいう．円に外接する正n角形とは，円周をn等分した各点において円の接線をひき，隣り合う点における2つの接線の交点を頂点とする正n角形をいう．

(1) $a_n = \frac{1}{2}\cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin\frac{2\pi}{n}\cdot n = \underline{\frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}}$ //

(2) $b_n = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}}\right)^2\cdot\sin\frac{2\pi}{n}\cdot n$

$= \frac{n}{2}\cdot\frac{2\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}}{\cos^2\frac{\pi}{n}}$

$= \underline{n\tan\frac{\pi}{n}}$ //

(3) $\frac{b_n}{a_n} = \frac{n\tan\frac{\pi}{n}}{\frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}} = \frac{n\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}}{n\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}} = \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{n}}$

$\therefore \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{n}} < \frac{4}{3}$

$\therefore \cos^2\frac{\pi}{n} > \frac{3}{4}$

$\therefore \cos\frac{\pi}{n} > \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \frac{\pi}{n} < \frac{\pi}{6}$

$\therefore n > 6$ 　　$\therefore \underline{n = 7}$ //